Walter Tydecks

Dynamische, geträumte und imaginäre Zahlen

- Zur mathematischen Einbildungskraft bei Hegel am Beispiel des Quadrats und seiner Umkehrung, der Irrationalzahlen

Beitrag für den Arbeitskreis zu Hegels Naturphilosophie *Anthropologie und Psychologie in der Naturphilosophie Hegels,* Leipzig am 30.11. - 1.12.2018

Kaum jemand verbindet mit der Mathematik eine besondere Art von Einbildungskraft. Und doch gibt es dynamische, geträumte und imaginäre Zahlen. Mit den dynamischen Zahlen sind seit Platon die nur im Denken erfassbaren Irrationalzahlen gemeint. Platon sprach von den träumenden Mathematikern, denen im Traum ungewöhnliche Zugänge zu den Zahlen erschlossen sind. Und die imaginären Zahlen gelten sogar für die Mathematiker von Beginn an als reines Ergebnis der Einbildungskraft. Von Hegel sind mir jedoch weder Äußerungen zu den träumenden Mathematikern nach Platon bekannt noch zu den imaginären Zahlen, obwohl er sie nachweislich gekannt hat. Daher beschränke ich mich im Folgenden ganz auf die dynamischen Zahlen.

Die Einbildungskraft nimmt in der Entwicklungsgeschichte des Geistes eine Schlüsselrolle ein. Mit der Einbildungskraft löst sich der Geist von der Bindung an die unmittelbar gegebenen Eindrücke und Wahrnehmungen und vermag Abstand von ihnen zu gewinnen. Er bleibt nicht bei dem stehen, was er vorfindet, sondern malt sich dank seiner Phantasie aus, wie etwas so geworden sein kann, wie es jetzt ist, und welche Möglichkeiten für die weitere Entwicklung bestehen. Die Möglichkeiten existieren vor ihrer Verwirklichung nur virtuell in der Einbildungskraft. Sie bilden ein Möglichkeitsfeld, und sich in ihm bewegen zu können, lässt den Geist den Weg zu sich selber und seiner eigenen Freiheit finden und betreten. "Die Vorstellung ist die Mitte in dem Schlusse der Erhebung der Intelligenz" (HW 10.263). Der Geist bleibt nicht bei den Bildern und Sprachelementen stehen, die er vorfindet, sondern beginnt seine eigene Sprache zu sprechen. Seine Einbildungskraft schwingt sich auf bis zur "Zeichen erschaffende(n) Tätigkeit", mit denen sie "ihren selbständigen Vorstellungen ein bestimmtes Dasein aus sich gibt" (HW 10.270) und erzeugt die Sprache und die Buchstabenschrift einschließlich aller mathematischen Symbole.

Das sieht nach einem zirkulären Schluss aus: Wie kann ohne bereits über Sprache und Zeichen zu verfügen an etwas dessen Sprache und Bedeutung erkannt werden? Wir finden in der Natur weder Zahlen noch Worte oder Namen vor, aber wir vermögen es mit unserer Einbildungskraft, aus und in der Anschauung der Natur nicht nur deren Zahlen, Worte und Namen zu finden, sondern mit ihnen die Sprache, mithilfe derer das möglich ist. Der Zirkel kann nur durchbrochen werden, wenn er in einem größeren Horizont gesehen wird. Dafür wählt Hegel bewusst eigenartige und umstrittene Ausdrücke. Die Vorstellungen entstehen aus einem "nächtlichen Schacht, in welchem eine Welt unendlich vieler Bilder und Vorstellungen aufbewahrt ist, ohne daß sie im Bewußtsein wären" (HW 10.259). Sie sind anfangs in einem Zustand wie ein "Keim", bevor sie "zur *Existenz* kommen, in *virtueller* Möglichkeit" (HW 10.259).

Hegel vertraut auf die Kraft der von ihm gewählten Bilder wie Schacht und Pyramide (HW 10.270). Sie erinnern an die romantische Todes- und Nachtsymbolik von Novalis, Hölderlin und bei einiger Phantasie an die Gemälde von Caspar David Friedrich. Warum kann sich Hegel sicher sein, dass er dem Schicksal der Romantik entgeht, wenn sich deren Einbildungskraft in leere Phantastereien verliert und später zum Spottbild eines überfliegenden, rein subjektiven spekulativen Denkens wurde? Er verlässt sich auf die Sicherheit der philosophischen Begriffsbildung. Und diese stützt sich trotz aller anderslautenden Bekenntnisse an wichtigen Punkten auf die mathematische Einbildungskraft.

Wenn es gelingt, an den mathematischen Zahlen zu zeigen, dass sie nicht nur formal, diskret und letztlich tot, sondern lebendig und dynamisch sind, ist am Beispiel der Mathematik der Weg der Einbildungskraft nachvollzogen. Dafür gibt es im Werk von Hegel positive wie negative Hinweise. Er sieht an den verschwindenden Größen der Differentialrechnung eine innere Bewegung, die sich an den Differentialen als den kleinsten Einheiten dieser Rechnung selbst zeigt und sieht mit dem mathematischen Begriff des Differentials die "Vexierfrage" der Philosophie nach der Unendlichkeit beantwortet (HW 5.169). Auf der anderen Seite war Hegel überaus skeptisch gegenüber allen überlieferten Ansichten, die die Mathematik in den Bereich der Einbildungskraft führen. Das Verhältnis von Mathematik und Philosophie geht für Hegel nur in eine Richtung. Für einen Mathematiker ist es ernüchternd, wenn nicht frustrierend, wenn Hegel schreibt: "Die Philosophie bedarf solche Hilfe nicht, weder aus der sinnlichen Welt, noch aus der vorstellenden Einbildungskraft", und wer sie annimmt, für den ist es "nichts als ein bequemes Mittel, es zu ersparen, die Begriffsbestimmungen zu fassen, anzugeben und zu rechtfertigen" (HW 5.386).

Ein näherer Blick auf sein Werk zeigt für mich jedoch, wie eng sich für ihn die philosophische und mathematische Einbildungskraft verflechten. Das soll im ersten Teil am Beispiel des Quadrats und der mit dessen Diagonale gegebenen Frage nach den Irrationalzahlen gezeigt werden. Hegel steht in einer Tradition, die von der babylonischen Mathematik über Pythagoras, Platon und Aristoteles bis zu deren Interpreten im 20. Jahrhundert reicht, von denen insbesondere Stenzel, Heidegger und Szabo zu nennen sind.

Dynamische Zahlen

In der *Wissenschaft der Logik* und der Naturphilosophie will Hegel bestimmte empirische Erkenntnisse wie zum Beispiel die Bewegungsgleichung des freien Falls $s = ½ \cdot g \cdot t^2$ begrifflich herleiten. Wenn in dieser Gleichung die Zeit t im Quadrat auftritt, ist das für ihn nicht einfach eine empirisch beobachtete Gesetzmäßigkeit, sondern der Hinweis, diese Gleichung umgekehrt mit dem "*Quadrat*" aus dem "*Begriffe* der Sache" zu verstehen (HW 5.347, HW 9.78f).

Das Quadrat tritt nicht nur in der Bewegungsgleichung auf. Am Steigungsverhalten der Parabel der Quadratfunktion $f = x^2$ können die Regeln des Differentialkalkül abgelesen und anschließend verallgemeinert werden. Der Satz des Pythagoras lässt sich verstehen als eine Erhaltungsgröße, bei der im Übergang vom Quadrat über der Hypotenuse zu den Quadraten über die Katheten der Flächeninhalt erhalten bleibt. Das mag wie eine willkürliche Sammlung von Beispielen klingen, und doch stellt sich die Frage: Deutet das auf einen übergreifenden Begriff des Quadrats, der zwar eindeutig aus der Mathematik stammt, aber nur mit philosophischer Begriffsbildung zu klären ist und den die Mathematik als gegeben hinnehmen muss, um mit ihm operieren zu können?

Mit dem Begriff des Quadrats ist sicher weder das umgangssprachliche, griechische Wort für Quadrat gemeint, *platys*, platt, breit, eben, noch ist damit *tetragonos* gemeint, das Viereck. Sondern es ist an den Begriff *dynamis* zu denken, den Platon im Dialog *Theaitetos* gebraucht und sich offenbar auf eine unter Mathematikern gängige Praxis bezieht.

Was ist am Quadrat dynamisch? Szabó erläutert es mit einer Analogie zu den Wechselkursen unterschiedlicher Währungen.

> "Man vergleiche bei Xenophon (Anab I 5, 6): 'der *siglos* (eine asiatische Münze, das hebräische Seckel) *macht aus, gilt* oder *hat den Wert* (*dynatai*) von siebenundeinhalb attischen Obolen." (Szabó, 46 Fn. 20)

So wie in der Finanzwirtschaft gefragt wird, welchen Obolos-Wert ein Siglos hat (heute könnte als Beispiel genannt werden: welchen Dollar-Wert ein Euro hat, und jeder kennt von Marx die Beispiele aus der Tauschwirtschaft, wie viel Ellen Leinwand ein Rock wert ist, usf.), so wird in der Geometrie gefragt, welchen Quadrat-Wert ein Rechteck hat. Um eine Währung in eine andere umrechnen zu können, muss es einen gemeinsamen, vermittelnden Maßstab geben. Es muss eine Transformation geben, mit der eine Währung in eine andere gewechselt werden kann. Analog muss es eine Transformation geben, mit der ein Rechteck in ein Quadrat umgewandelt werden kann, um – in einer sicher ungewohnten Ausdrucksweise – zu erkennen, wie viel Quadrat ein Rechteck wert ist.

Theaitetos unterscheidet zwei Fälle: Bei manchen Rechtecken ist es geometrisch möglich, sie direkt in ein Quadrat mit ganzzahliger Seitenlänge umzuwandeln und dort an der Seitenlänge (*mekos*) abzulesen, um welches Quadrat es sich handelt. Zum Beispiel kann ein Rechteck mit den Seitenlängen 2 und 8 und dem Flächeninhalt $2 \cdot 8 = 16$ in das Quadrat mit der Seitenlänge 4 umgewandelt werden mit dem Ergebnis $2 \cdot 8 = 16 = 4^2$. Aufgaben dieser Art können bereits in der Vorschule unterrichtet werden, wenn z.B. Kinder die Aufgabe bekommen, ein aus 16 quadratischen Bausteinen bestehendes Rechteck so zu verschieben, dass ein Quadrat entsteht. Bei anderen Rechtecken wie zum Beispiel mit den Seitenlängen 3 und 5 und dem Flächeninhalt 15 ist das nicht möglich. Die Seitenlänge 3 ist zu klein, da das Quadrat von 3 nur die 9 ergibt, die Seitenlänge 4 ist dagegen bereits zu groß, da das Quadrat von 4 die 16 ergibt. Nur für diesen Fall sprach Theaitetos von *dynamis* und nicht von *mekos* und hat damit wie von Sokrates aufgefordert eine klare Begriffsdefinition geliefert.

Der dänische Mathematikhistoriker Jens Høyrup (* 1943) ist dem weiter nachgegangen und konnte nachweisen, dass es zwar für *mekos* einen Vorläufer in der babylonischen Mathematik und bei den Sumerern gibt (*mithartum),* während der entsprechende Ausdruck *mahirum* für *dynamis* bei den Babyloniern nur im ökonomischen Denken und nicht in der Mathematik gebraucht wurde. Es ist eine eigenständige Leistung der griechischen Mathematik, dies auf die Mathematik zu übertragen und von dynamischen Zahlen zu sprechen. Platon konnte davon ausgehen.

Daraus ergeben sich die ersten Hinweise, was unter dynamischen Zahlen zu verstehen ist:

(i) Es muss eine Umwandlung existieren, bei der aus etwas Gegebenem etwas Neues entsteht, in diesem Beispiel aus Rechtecken Quadrate, oder im Beispiel der Finanzen aus einer Währung eine andere Währung.

(ii) Es muss einen Wert geben, der bei der Umwandlung erhalten bleibt. Beim Geld ist das der Wert des Geldes (ohne an dieser Stelle der Frage weiter nachzugehen, wie der gemessen werden kann), bei der Umwandlung des Rechtecks in das Quadrat der Flächeninhalt.

(iii) Und es muss eine Transformation (eine Umrechnung bzw. eine geometrische Konstruktion) geben, mit der die Umwandlung algorithmisch durchgeführt werden kann. Das sind in der Finanzwirtschaft die Währungskurse, in der Mathematik die Algorithmen bzw. geometrischen Konstruktionen, mit denen Irrationalzahlen beliebig genau angenähert werden können.

Mit diesen Eigenschaften ist für mich jedoch noch nicht der Begriff der dynamischen Zahlen erschöpft. Das Bedeutungsspektrum von *dynamis* umfasst auch Macht und Möglichkeit.

(iv) Es muss eine Macht (*dynamis*) geben, mithilfe derer die Umwandlung vollzogen werden kann.

In der Finanzwirtschaft ist das die Macht einer von allen anerkannten internationalen Behörde oder die Macht des stärkeren Landes, das die Regeln festlegt, wie Währungskurse gebildet und durchgesetzt werden. In der Mathematik ist das die Macht, die sicherstellt, dass die Transformation gelingt. Mit der mathematischen Einbildungskraft (wobei mit ‘Kraft’ der Aspekt von Macht, Kraft, Vermögen, *dynamis* hinzukommt) ist gemeint, dass sich der Mathematiker auch dort eine Zahl v o r s t e l l e n und ihren Begriff finden kann, wo es für die beliebig genaue Annäherung dieser Zahl nur ein Konstruktionsverfahren gibt, die Zahl selbst jedoch nie greifbar ist.

Die mathematische Einbildungskraft ist so selbstverständlich geworden, dass sie für sich als eigenständige Leistung kaum mehr wahrgenommen wird. Jeder geht dank seiner Einbildungskraft davon aus, dass die Irrationalzahlen so wie die natürlichen und rationalen Zahlen eindeutige Punkte auf der Zahlengerade sind. Zwar ist an der Diagonale des Einheitsquadrats unmittelbar anschaulich zu sehen, dass es eine solche Zahl geben muss, aber es ist unmöglich, auf der Zahlengerade ihren genauen Ort zu ermitteln, sondern es kann lediglich ein Intervall angegeben werden, in dem die Zahl liegt. Dies Intervall kann zwar beliebig genau eingegrenzt werden, aber es wird nie auf einen eindeutigen Punkt reduziert werden können. Irrationalzahlen sind daher genau genommen keine Zahlen, sondern beliebig genau bestimmbare Zahlenmengen, von denen eine die gesuchte Irrationalzahl ist. Das ergibt das Bild des Schachts: Hier ist mit Schacht nicht die Mine gemeint, in der die Vorstellungen wie Schätze abgelegt sind und geborgen werden können, sondern der Abgrund, an dessen Boden sich die gesuchte Zahl befindet.

Was ist in diesem Zusammenhang unter Macht zu verstehen? Platon legt in meinem Verständnis in seinem Dialog *Theaitetos* nahe, dass es die Macht der Begrifflichkeit ist, dank derer eine Umwandlung von etwas in den mit dem Begriff verbundenen Begriffswert gelingt. Wenn der Begriff des Rechtecks und der Begriff des Quadrats gefunden sind, liegt es für ihn an der Macht des Begriffs, dass begrifflich gesehen jedes Rechteck einen Quadratwert hat, selbst wenn dieser sich nicht geometrisch mit Figuren aus ganzzahligen Seitenlängen konstruieren lässt. Ich vermute, dass für Platon mit Idee dasjenige gemeint ist, das dem Begriff diese Macht verleiht. Diese Macht gehört nicht dem einzelnen Menschen an, der diesen Begriff denkt, sondern der Mensch hat in seinem Denken an dieser Macht teil. Bei Hegel ist es in meiner Deutung sein Verständnis der ‘Sache selbst’ und ihres Tun, worin sich diese Macht zeigt (HW 3.304, 5.25, 6.119). Das Tun der Sache selbst darf für Hegel nicht verwechselt werden mit dem Tun des Denkenden, der diese Sache denkt. Die Sache selbst gibt mit ihrem Tun etwas hinzu. Das ist die Macht, um die es in diesem Zusammenhang geht.

Was bei Platon und Hegel nur vermutet und hinein interpretiert werden kann, wird mit Aristoteles explizit. Er unterschied das "unvernünftige" und das "vernünftige" Können / Vermögen (*dynameis alogoi*, *dynameis meta logon*, Met. IX 2, 1046a36-b2). Das unvernünftige Können ist nicht gegen die Vernunft, sondern bereits ohne Vernunft gegeben. Das sind in diesem Beispiel die Rechtecke, die direkt in ein Quadrat mit einer ganzzahligen Seitenlänge umgewandelt werden können. Ihr Quadratwert lässt sich an der Seite (*mekos*) messen. Dafür ist keine besondere Vernunft erforderlich.

Was unterscheidet davon das vernünftige Vermögen (*dynameis meta logon*)? Für Heidegger kommt bei Aristoteles mit dem *logos* die Fähigkeit hinzu, etwas nicht nur so zu sehen, wie es gerade ist und über welche Kraft es bereits aktuell verfügt, sondern im Denken über es hinauszugehen, es von allen Seiten zu sehen, seinen inneren Mangel (*steresis*) wie auch sein größeres Umfeld und die in ihm enthaltenen Möglichkeiten zu erkunden, Wege einzuschlagen, die über etwas hinausgehen und wieder zurückkehren (Heidegger, 145f). *dynameis meta logon* geht über die geometrische Konstruktion hinaus und erkennt die Quadratwerte als einen reinen Begriff, für den es keine geometrische Transformation und keine natürliche Zahl gibt. Wenn heute die Wurzeln als Irrationalzahlen bezeichnet werden, würde Aristoteles widersprechen. Sie sind nicht irrational, sondern im Gegenteil handelt es sich um diejenigen Quadratwerte, die ausschließlich mittels der Vernunft als *dynameis meta logon* bestimmt werden können. Wird Theaitets Unterscheidung in *mekos* und *dynamis* festgehalten, handelt es sich erst bei ihnen um dynamische Zahlen.

Sie haben nicht einfach eine unbestimmbare Macht, die sich in der Fähigkeit zeigt, sich auch dort Zahlen vorstellen zu können, wo diese sich nicht geometrisch konstruieren lassen, sondern sie liegt in der Fähigkeit der Vernunft, über das Gegebene hinaus etwas im Raum seiner Möglichkeiten sehen zu können. Das ergibt die 5. Bestimmung der dynamischen Zahlen:

(v) Es muss einen Möglichkeitsraum (Potential, *dynamis*) geben, aus dem heraus die dynamischen Zahlen entstehen und in dem sie mittels des *logos* in ihrer Lebendigkeit beschrieben werden können, wobei es einiger begrifflicher und mathematischer Einbildungskraft bedarf, sich unter lebendigen Zahlen etwas vorstellen zu können.

Wenn all diese Aspekte der dynamischen Zahlen erkannt sind, bleibt dennoch ein gewisses Unbehagen zurück: Ist damit wirklich der Begriff des Quadrats bestimmt, oder nur der allgemeinere, von Platon verwendete Begriff der *dynamis*? Alle diese Momente gehören zum Quadrat, aber dessen Inhalt ist die einfache Aussage, dass etwas mit sich selbst ins Verhältnis gesetzt wird. An diesem kritischen Punkt geht für Hegel das Quantum im Potenzverhältnis über in "die Wahrheit des Quantums, Maß zu sein" (HW 5.384). Es wird paradoxerweise an sich selbst gemessen. Er erzeugt aus sich das ihm zu Grunde liegende Maß. Das ist seine Lebendigkeit. Erst mit ihr ist der volle Begriff der dynamischen Zahlen gefunden:

(vi) Es muss einen Selbstbezug geben, mit dem eine *dynamis* an sich selbst gemessen werden kann und ihr Maß findet. Dies Maß ist das Quadrat.

Wird zurückgekehrt zur Ausgangsfrage der Bewegungsgleichung des freien Falls, in der die Zeit im Quadrat auftritt, ist das für Hegel nicht einfach ein Zufall oder ein als gegeben hinzunehmendes empirisches *factum brutum*, sondern in diesem Quadrat zeigt sich der Begriff der Sache. Für mich zeigt sich im Quadrat der Zeit, wie die Zeit im Quadrat zu ihrem eigenen Maß findet. Die Zeit wird an sich selbst gemessen. Das fällt keinem Physiker auf, solange er die Bewegungsgleichung einfach als eine intuitiv geratene Formel ansieht, deren Wahrheit sich empirisch beliebig genau bestätigen lässt. Erst mit etwas Abstand kann deutlich werden, was hier geschieht. Dem Physiker genügt es zu sagen, dass und wie in dieser Gleichung der Ort (s) und die Zeit (t) in Relation gesetzt sind. Das hat in voller Klarheit erst Galilei gefunden. Mit den von ihm erdachten und ausgeführten Experimenten und der an ihnen gemessenen Bewegungsgleichung ist in der Physik eine Transformation gefunden, an einer Bewegung deren quadratischen Zeitwert (und mit ihm das Maß der Zeit) zu finden. Der in dieser Gleichung auftretende Quadratwert erfüllt die volle Definition von *dynamis*. Das ist nach meiner Überzeugung die Lösung der von Hegel in seiner Naturphilosophie aufgeworfenen Frage nach dem Begriff der Bewegung.

Kann mit der Differentialrechnung der Übergang von einer Funktion zur abgeleiteten Funktion (die Ableitungsregel) wiederum als eine Transformation verstanden werden, die eine Funktion in eine andere Funktion umwandelt, so wie Rechtecke in Quadrate transformiert werden, und kann die Fragestellung der Differentialrechnung so formuliert werden, welche Steigung von Tangenten ein Funktionsverlauf wert ist? So verstehe ich Hegels Ausführungen zum Differentialkalkül, den er aus der qualitativen Potenzbestimmung herleiten will. Mathematisch wird mit der Differentialrechnung an jedem Punkt der Kurve der Raum aller Möglichkeiten betreten, wie sich die Kurve an dieser Stelle verändern kann. Das ist mathematisch der Tangentialraum.

Zusammenfassend zeigen für mich das Beispiel des Quadrats und der Irrationalzahlen mit ihren vielfältigen Anwendungen von der Einführung neuer Zahlen über die Bewegungsgleichung der Mechanik bis zum Grundverständnis der Differentialrechnung, wie sich nicht gegenüber, sondern an der Mathematik die Macht der Einbildungskraft nachweisen lässt, die aus sich heraus von ersten empirischen Beobachtungen bis zum vollen Verständnis des Begriffes einer Sache, seines inneren Maßes und seiner Lebendigkeit führen. Mit der Einbildungskraft kann der Bogen geschlagen werden aus einem Entwurf von Möglichkeiten und den in ihm angelegten, noch nicht oder erst teilweise bewussten Vorstellungen, über empirisch überprüfbare Transformationen bis hin zu den mit ihnen als inneren Voraussetzungen gegebenen Maßen und deren Macht.

Literatur

Aden Evans: The surd
in: Simon Duffy (ed.): Virtual Mathematics, Manchester 2006, 209-234

Georg Wilhelm Friedrich Hegel: Werke in 20 Bänden. Auf der Grundlage der Werke von 1832-1845 neu ediert. Red. E. Moldenhauer und K. M. Michel. Frankfurt/M. 1969-1971 (zitiert als HW); Link

Martin Heidegger: Aristoteles, Metaphysik Θ 1-3, Frankfurt am Main 2006

Jens Høyrup: Dynamis, the Babylonians, and Theaetetus 147c7-148d7
in: Historia Mathematica 17 (l990), 201-222; Link

Julius Stenzel: Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles, Darmstadt 1959 [1924]

Arpad Szabó: Die Anfänge der griechischen Mathematik, Wien 1969