Walter Tydecks

Hegels Herleitung des Differentialkalküls aus der qualitativen Potenzbestimmung

- Rehabilitation der Hegelschen Deutung auf Grundlage der mathematischen Methoden des 20. Jahrhunderts

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Hegels Deutung des Differentialkalküls ist absolut eigenständig und bis heute in der Mathematik nicht einmal ernsthaft zur Kenntnis genommen worden. Er sieht im Differentialkalkül ein völlig neues Verfahren, das unmöglich auf dem Boden der überlieferten Mathematik oder im Rahmen der formalen Logik begründet werden kann. In ihrem Bestreben nach formaler Strenge ist die Mathematik bis heute unfähig, das Neuartige des Differentialkalkül zu erkennen. Hegel will zeigen, dass sie sich buchstäblich eine neue Dimension erobert hat. Es ist ihr gelungen, nicht mehr nur mit Zahlen zu rechnen und geometrische Figuren zu konstruieren, sondern sie vermag unmittelbar vollständige Figuren miteinander zu verknüpfen und aus ihnen neue, höherdimensionale Figuren zu erzeugen. Im einfachsten Fall werden Linien miteinander multipliziert und erzeugen eine Fläche. Das wird in der Regel verwechselt mit der Rechenoperation, wenn beispielsweise aus den beiden Zahlenwerten, die die Längen der Seiten eines Rechtecks beschreiben, der neue Zahlenwert errechnet wird, der den Flächeninhalt des Rechtecks darstellt. Hegel geht es dagegen nicht um die Multiplikation von Zahlen, die zu neuen Zahlen führt, sondern um die Multiplikation von Linien, die zu einer Fläche führt. Das geschieht, wenn z.B. im Koordinatenkreuz aus den beiden Achsen eine Fläche aufgespannt wird. Jeder kennt und versteht das, doch wird es meistens nur für eine Methode gehalten, die Anschaulichkeit zu verbessern. Hegel erkennt hier jedoch etwas qualitativ Neues. Hier gelingt es der Mathematik, aus Elementen mit mindestens einer Dimension Figuren in höheren Dimensionen zu erzeugen, während die Zahlen dimensionslos sind und als Punkte dargestellt werden. Diesen Übergang bezeichnet Hegel als P o t e n z i e r u n g . Wie ist er möglich, und was geschieht dabei? Das ist die Frage nach den Potenzbestimmungen, aus denen Hegel den Differentialkalkül herleiten will. Wie ist mit rein quantitativen Methoden ein solcher qualitativer Übergang zu bewerkstelligen?

Hegel will keineswegs über den Begriff der Größe oder der Dimension philosophieren, um mithilfe philosophischer Denkweisen der Mathematik von außen zu erklären, was sie tut. Sondern er begibt sich mitten hinein in das Gebiet der Mathematik und will anhand der von der Mathematik selbst aufgeworfenen Fragen zur Begründung des Differentialkalküls zeigen, wie der Differentialkalkül aus den Potenzbestimmungen, die zum Übergang in höhere Dimensionen führen, begründet werden kann. Das zwingt ihn, Begriffe zu gebrauchen, die bereits von der Mathematik und von der Philosophie genutzt werden. Was er sagen will, droht daher missverstanden zu werden oder unverständlich zu bleiben, wenn an den überlieferten Bedeutungen dieser Begriffe festgehalten wird. Hegel will zeigen, dass der Differentialkalkül aus qualitativen Potenzbestimmungen zu erklären ist. Was ist damit gemeint oder besser gesagt: nicht gemeint? In der überlieferten Bedeutung ist mit Potenz das rein quantitative Rechnen gemeint, das aus einer Zahl x eine neue Zahl y errechnet, z.B. $x^2 = x \cdot x$. Hier ist x^2 die zweite Potenz von x. In dieser Bedeutung wird jedoch keine neue Dimension erreicht, sondern alles spielt sich zwischen Zahlen ab. Zum Beispiel wird aus der Zahl 3 die neue Zahl $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ ausgerechnet. Die Zahl 9 ist wie die Zahl 3 dimensionslos und liegt wie sie auf der eindimensionalen Zahlengerade, führt also in keine neue Dimension. Hegel geht es dagegen um eine Potenzbestimmung, die in höhere Dimensionen führt, zum Beispiel von Linien zu Flächen.

In diesem Beitrag soll sein Ansatz mithilfe der von der Mathematik im 20. Jahrhundert entwickelten neuen Verfahren der Tangentialbündel und allgemeiner der Faserbündel rekonstruiert werden. In einem Satz zusammengefasst wird die These vertreten, dass die Konstruktion von Tangential- und Faserbündeln die allgemeinste Methode ist, die Hegel als Potenzierung verstanden hat. Das hat im Grunde bereits zu einem neuen Verständnis des Differentialkalkül geführt, der jedoch noch nicht explizit gemacht ist, weil die Mathematik in ihren Lehrbüchern nach wie vor den im 19. Jahrhundert von Cauchy und Weierstraß eingeführten Definitionen des Grenzwerts folgt.

Wenn Hegels Deutung des Differentialkalküls gefolgt wird, dann wird es auch möglich, einen klareren Begriff der Bewegung zu finden. Daher trifft dieses Thema aus zwei Gründen in das Zentrum der Wissenschaft der Logik von Hegel: (1) Es wird sich im Weiteren zeigen, wie Hegel einen Begriff des Widerspruchs entwickelt, mit dem die Auflösung eines Widerspruchs aus seiner Verstocktheit verstanden werden kann. Der Widerspruch wird aufgelöst, indem er eine neue Dimension eröffnet, in der er sich bewegen kann. Der Widerspruch geht zu Grunde, indem in der neuen Dimension sein Grund gefunden wird. Es wird sich zeigen, wie diese Auflösung genau der Vorstellung folgt, die mit der Herleitung des Differentialkalküls aus den qualitativen Potenzbestimmungen gewonnen wird. (2) Zum anderen ist Hegel seit Trendelenburg zurecht vorgeworfen worden, dass seine Wissenschaft der Logik eine Vorstellung der Bewegung voraussetzt, aber nicht explizit zu entwickeln vermag. Nur über ein Verständnis der qualitativen Potenzbestimmungen scheint mir der bei Hegel fehlende oder nur implizit vorausgesetzte Begriff der Bewegung aufweisbar zu sein.

Statt Hegels Ideen aufzugreifen, hat sich in der Mathematik der 1821 von Cauchy eingeführte strenge Begriff der Ableitung durchgesetzt, den Bolzano und Weierstraß in der seither gültigen Form ausarbeiteten (Definition von Grenzwert und Stetigkeit durch das epsilon-delta-Kriterium, siehe Wikipedia). Eine Rehabilitation Hegels führt daher notwendig zu einer Auseinandersetzung mit Cauchy. Die von ihm und anderen vertretenen Definitionen und Formalisierungen haben zweifellos der Mathematik in einer bestimmten Entwicklungsphase geholfen und insbesondere ermöglicht, formal die Differentiation auf andere Zahlklassen wie die komplexen Zahlen zu erweitern, sind inzwischen aber zu einer Belastung geworden, die die weitere Entwicklung eher hemmt statt fördert. – Inhaltlich wird damit zugleich vorbereitet, ein anderes philosophisches Verständnis der Grundlagenbegriffe der Physik wie Energie und Kraft zu gewinnen. Das wird fortgeführt werden in Beiträgen zu Hegels Verständnis der Trägheit und des Systems der Naturwissenschaften (Mechanismus, Chemismus, Organismus).

Hegel kannte Cauchys Definition des Grenzübergangs mindestens in der ausführlichen Rezension von Dirksen, lehnte sie aber als zirkulär ab (HW 5.315 Fußnote). Sein eigener Deutungsansatz, die Besonderheiten des Differentialkalkül aus einer *qualitativen Größenbestimmtheit* herzuleiten, gilt dagegen als weltfremde Philosophie, sofern er überhaupt wahrgenommen wurde. Wichtigste Ausnahme ist die 1986 von Michael Wolff veröffentlichte Studie *Hegel und Cauchy*, von der im folgenden an vielen Punkten ausgegangen wird. Stattdessen beschäftigen sich die meisten Bücher über Philosophie der Mathematik nach wie vor mit der "Grundsatzkrise" des frühen 20. Jahrhunderts, den Gegensatz von Formalismus und Intuitionismus (bzw. in dessen Nachfolge Konstruktivismus).

Wer heute Hegel zum Differentialkalkül liest, wird als erstes über seine gute Kenntnis der historischen Entwicklung überrascht sein. Innerhalb der Mathematik ist das Interesse an der eigenen Geschichte zu großen Teilen verloren gegangen, und es gilt als ausreichend, den jeweils aktuellen Stand zu kennen und daran weiter zu arbeiten. Die Regeln und Sätze des Differentialkalkül sind bekannt und werden bereits im Schulunterricht gelehrt. Kaum jemand macht sich mehr klar, aus welchen empirischen Studien sie entstanden sind. Das ist Hegel aber wichtig, denn nur wenn verstanden wird, wie diese Regeln aufgestellt werden konnten, kann auch erkannt werden, auf welche impliziten Annahmen die Mathematiker seinerzeit zurückgingen. Bei der Formulierung des Differentialkalkül wurden gewissermaßen naiv die qualitativen Gesichtspunkte genutzt, die Hegel erkennen und herausstellen will, um aus ihnen den Differentialkalkül herleiten zu können.

Wenn Hegel sich derart intensiv mit Grundlagenfragen der Analysis beschäftigt, geht es ihm keineswegs nur darum, in der Mathematik Beispiele für seine philosophischen Ideen zu finden oder als Philosoph der Mathematik bei der Klärung ihrer Grundlagenfragen zu helfen, sondern der Differentialkalkül ist für ihn die wichtigste Neuentwicklung der Wissenschaft seiner Zeit, aus deren

Analyse er die Grundideen für seine eigene Philosophie finden wollte. Im folgenden soll gezeigt werden, wie zahlreiche Fragen seiner Wissenschaft der Logik ausgehend von seiner Deutung des Differentialkalkül verständlicher werden. Ein großes Vorbild hatte er sicher in Leibniz, der 1715 in den *Metaphysischen Anfangsgründen der Mathematik* den Beweis dafür gesucht hatte, »dass es eine Kunst der Analysis gibt, die umfassender ist als die Mathematik und aus der diese gerade ihre vollkommensten Methoden entlehnt« (Leibniz, Hauptschriften Bd. 1, S. 35).

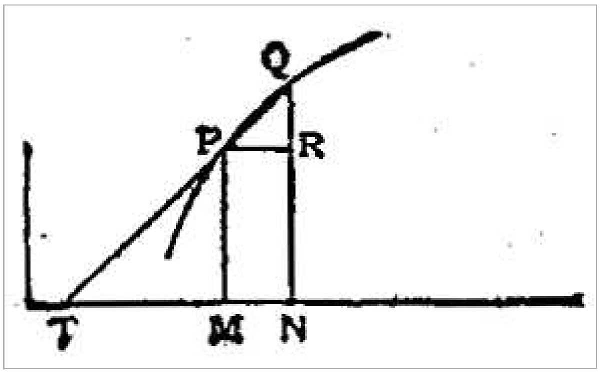
Empirische Untersuchungen von Kurven und ihren Tangenten

Bis ins Detail malt Hegel aus, wie im 17. und 18. Jahrhundert für einzelne Probleme jeweils besondere, meist nur bedingt oder gar nicht übertragbare Lösungswege gesucht und gefunden wurden. Sie trafen nie das Problem im Kern, konnten es nicht aus allgemeinen Begriffen entwickeln, sondern lieferten ad-hoc-Lösungen, die gern als »Methoden« verkauft wurden. Die Mathematiker hielten ihre Methoden oft geheim, um sich bei öffentlich ausgeschriebenen Preisfragen einen Vorteil zu sichern.

> »Es ist nicht ohne Interesse, von dem Historischen hierüber so viel zu bemerken, daß die ersten Entdecker ihren Fund nur auf eine ganz empirische Weise anzugeben wissen, ohne eine Rechenschaft von der völlig äußerlich gebliebenen Operation geben zu können. Ich begnüge mich hierüber mit der Anführung *Barrows*, des Lehrers Newtons. In seinen *Lectiones opticae et geometricae*, worin er Probleme der höheren Geometrie nach der Methode der unteilbaren behandelt, die sich zunächst von dem Eigentümlichen der Differentialrechnung unterscheidet, gibt er auch, 'weil seine Freunde in ihn gedrungen' (lect. X), sein Verfahren, die Tangente zu bestimmen, an. Man muß bei ihm selbst nachlesen, wie diese Aufgabe beschaffen ist, um sich eine gehörige Vorstellung zu machen, wie das Verfahren ganz als *äußerliche Regel* angegeben ist, – in demselben Stile, wie vormals in den arithmetischen Schulbüchern die Regeldetri oder noch besser die sogenannte Neunerprobe der Rechnungsarten vorgetragen worden ist. Er macht die Verzeichnung der Linienchen, die man nachher die *Inkremente* im *charakteristischen* Dreieck einer Kurve genannt hat, und gibt nun die Vorschrift als eine bloße *Regel*, die Glieder als *überflüssig wegzuwerfen*, die in Folge der Entwicklung der Gleichungen als Potenzen jener Inkremente oder Produkte zum Vorschein kommen *(etenim isti termini nihilum valebunt)*, ebenso seien [337] die Glieder, die nur aus der ursprünglichen Gleichung bestimmte Großen enthalten, wegzuwerfen (das nachherige Abziehen der ursprünglichen Gleichung von der mit den Inkrementen gebildeten) und zuletzt für *das Inkrement der Ordinate die Ordi-*

nate selbst und für das Inkrement der Abszisse die Subtangente zu substituieren. Man kann, wenn es so zu reden erlaubt ist, das Verfahren nicht schulmeistermäßiger angeben; – die letztere Substitution ist die für die Tangentenbestimmung in der gewöhnlichen Differentialmethode zur Grundlage gemachte *Annahme der Proportionalität* der Inkremente der Ordinate und Abszisse mit der Ordinate und Subtangente; in Barrows Regel erscheint diese Annahme in ihrer ganz naiven Nacktheit. Eine einfache Weise, die Subtangente zu bestimmen, war gefunden« (HW 5.336f).

Wer an Details interessiert ist, lese in der Encyclopaedia Britannica von 1911 den Eintrag über die Geschichte des Differentialkalkül (Wikisource). Barrow hat jedoch bereits sehr klar das Steigungsdreieck entwickelt, wovon Newton ausgehen konnte.



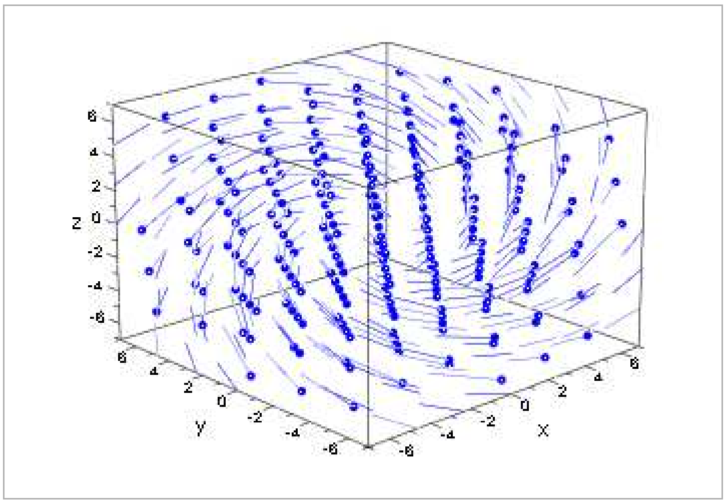
Figur 1: Barrows Steigungsdreiecke (Differential Triangle)
Das Diagramm zeigt deutlich die Grundidee, wie eine geschwungene Kurve durch Steigungsdreiecke und im Grenzübergang durch eine Tangente lokal angenähert wird. Es ist enthalten in: *Lectiones opticae el geometricae*, geschrieben vermutlich 1663-1664, veröffentlicht 1669, 1670. Quelle

Als trotz aller Widrigkeiten einmal der Durchbruch gelungen war, konnten recht schnell für alle einfachen Funktionen die Ableitungen gefunden werden. Damit ist die empirische Forschung jedoch keineswegs beendet. Die Analyse von Gradienten bleibt eine der wichtigsten Hilfsmittel der Naturwissenschaft. Wenn die Bewegungsgleichungen bestimmter Kräfte und damit die zu erwartende Entwicklung der Bewegung noch nicht bekannt sind, wird an zahlreichen Messpunkten gemessen, wie stark an diesen Stellen die Kraft ist und in welche Richtung sie weist. Gradienten werden durch Pfeile dargestellt. Hierfür ein aktuelles Beispiel aus der Medizin.

Nach Anbringen eines Bypass wird das Strömungsverhalten im Gefäß gemessen. In Figur 2a sind mit Pfeilen die Messergebnisse eingetragen: Die Länge des Pfeils zeigt die Stärke der Strömung an dieser Stelle, die Richtung des Pfeils, wohin die Strömung fließt. Aus diesen Messergebnissen wird ein zweites Diagramm (Figur 2b) entwickelt, indem entlang der jeweiligen Strömungsrichtung Kurven gezeichnet werden. Jeder Pfeil (Gradient) wird jetzt als Tangente an den verbindenden Kurven interpretiert. Die Kurven liegen um so dichter beieinander, je schneller sich die Strömung verändert. Das Diagramm zeigt anschaulich, an welchen Stellen Turbulenzen und mögliche Störungen auftreten. Zugleich sollte anschaulich deutlich sein, dass in der Regel zunächst nicht einmal offensichtlich ist, wie viele Dimensionen (Freiheitsgrade) zugrunde liegen. Es kann sein, dass es entlang einer Strömungslinie innere Beschleunigungen gibt. In diesem Fall muss das Diagramm dreidimensional veranschaulicht werden, vergleichbar einem Wollknäuel. In komplexeren Situationen sind noch mehr Freiheitsgrade denkbar.

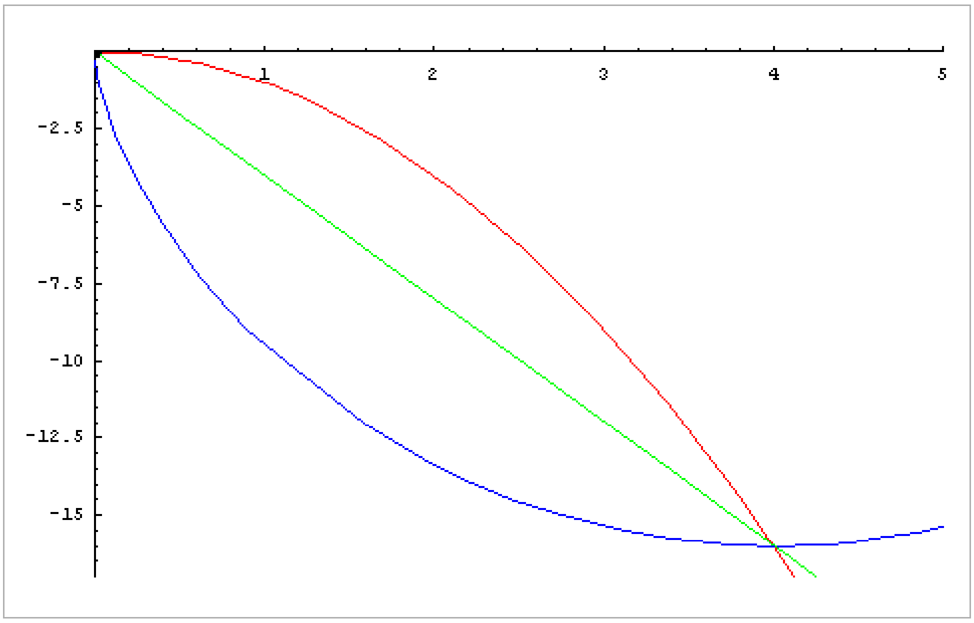
> Strömungslinien und Feldlinien stehen in jedem Punkt senkrecht aufeinander. Die Strömungslinie zeigt den Weg, entlang dessen die Strömung erfolgt. Die Feldlinie verbindet dagegen jeweils die Punkte, die die gleiche Feldstärke haben. Das anschaulichste Beispiel für Feldlinien sind die Höhenlinien eines Berges. Die Höhenlinien verlaufen entlang einer gleich bleibenden Höhe. Die Strömunglinien verlaufen senkrecht zu ihnen und zeigen, auf welchen Linien z.B. Wasser von der Bergkuppe den Berg hinabfließen würde. Meistens werden die Tangenten entlang der Feldlinien als »Tangenten«, und die senkrecht zu ihnen stehenden Tangenten entlang der Strömungslinien als »Cotangenten« bezeichnet. Gradienten und Cotangenten sind in dieser Sprachkonvention identisch. Dieser Sprachgebrauch kann natürlich zu einigen Missverständnissen führen.

Gesucht sind die Gleichungen, deren Ableitung die empirisch gefundenen Gradienten ergeben, um sie optimieren und daraus Konsequenzen für die medizinische Arbeit folgern zu können.



Figur 2: Vektorfeld und Stromlinien
»Darstellung eines Vektorfeldes anhand ausgewählter Punkte. Die Vektoren sind als Pfeile dargestellt, welche Richtung und Betrag (Pfeillänge) wiedergeben« (Wikipedia, abgerufen am 21.6.2017) Urheber: Mth77777 - Eigenes Werk, Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=12048094.

Fragestellungen dieser Art wurden bereits seit dem 17. Jahrhundert schrittweise komplexer. Eines der berühmtesten Beispiele ist die Brachistochrone: Gesucht ist »eine reibungsfreie Bahn zwischen einem höher und einem tiefer gelegenen Punkt, auf der ein Massenpunkt unter dem Einfluss der Gravitationskraft am schnellsten zum tieferen Endpunkt gleitet. Der Tiefpunkt der Bahn kann tiefer liegen als der Endpunkt« (Wikipedia). Diese Aufgabe hat schon 1696 Johann Bernouilli gelöst, also nur wenige Jahrzehnte nach den frühen Studien von Barrow.



Figur 3: Brachistochrone;
Die blaue Linie zeigt den Weg, auf dem eine Kugel im freien Fall am schnellsten zum Punkt mit den Koordinaten x=4 und y=-15 gelangt; Quelle

Diese Beispiele sollen zeigen, wie bis heute empirische Analysen Grundlage weiterer Studien für den Differentialkalkül sind, dessen Ausarbeitung keineswegs abgeschlossen ist. Insbesondere die Medizin und die dort eingesetzten bildgebenden Verfahren liefern ständig neues Material, aber auch die experimentellen Ergebnisse aus der Teilchenphysik und den zahlreichen Anwendungsgebieten der Katastrophentheorie sowie das Beobachtungsmaterial der Astrophysik haben eine Datenmenge anwachsen lassen, durch die die Wissenschaft heute in eine ähnliche Situation gekommen ist wie nach den frühen Himmelsbeobachtungen von Tycho Brahe, für die Kepler die Lösungen gefunden hat.

Von empirischen Größen zu Regeln des Differentialkalküls

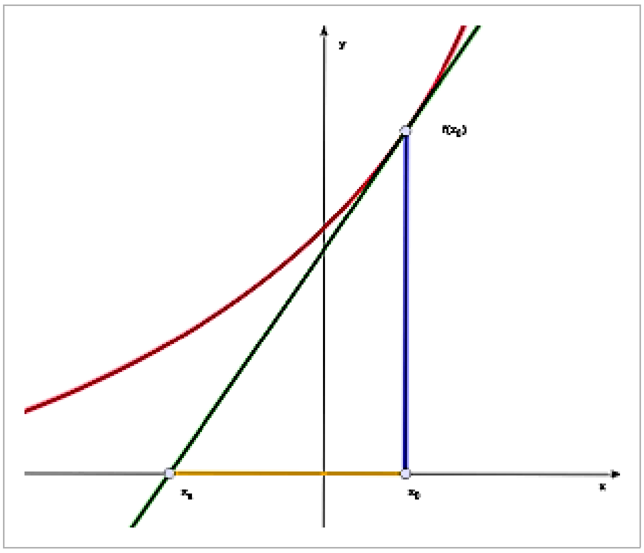
Die Suche nach algebraischen Regeln zum Bestimmen von Tangenten

Als die Steigungen der Tangenten entlang einer Kurve gemessen wurden, entstand die Frage, ob es irgendetwas gibt, woraus Regeln für die Steigung der Tangenten abgeleitet werden können. Zunächst konnte niemand erwarten, dass es überhaupt eine einheitliche Funktion gibt, die für jede Stelle x_0 die Steigung der Tangente an dieser Stelle liefert, und die Steigung der Tangenten nicht an jeder Stelle einzeln ermittelt werden muss. Heute erscheint das selbstverständlich. Um Hegels Deutung zu verstehen, ist jedoch zurückzugehen auf den historischen Moment, als Fragen dieser Art noch offen waren.

Noch weniger war zu erwarten, dass die Funktion zur Errechnung der Steigung der Tangenten aus der Funktion "abgeleitet" werden kann, deren Kurve betrachtet wird. Auch das erscheint erst heute selbstverständlich, seit die in einem mühsamen Forschungsprozess gefundenen Lösungen bekannt sind. Anfangs gab es die verschiedensten algebraischen Verfahren, die vorliegende Funktion zunächst für einzelne Stellen so umzurechnen, bis sie die empirisch gemessenen Steigungen der Tangenten lieferte und dadurch bestätigt wurde. In die Rechnungen gingen zahlreiche "Tricks" ein, Vermutungen und implizite Annahmen, die sich nicht begründen ließen und in Widerspruch zu den allgemeinen mathematischen Regeln stehen, sich aber in dem einen oder anderen Fall bewährt hatten und daher nach Möglichkeit verallgemeinert wurden. Auch für diese algebraischen Methoden gab es lange Zeit verschiedene "Geheimverfahren". Sie dürfen nicht verwechselt werden mit den empirischen Verfahren, wie die Steigung der Tangenten zu messen sind. Hier handelt es sich um algebraische Verfahren, die Funktion geschickt umzurechnen, bis das gewünschte Ergebnis gefunden ist. Der Ansatz zur endgültigen Lösung der Umrechnungsverfahren wurde erst gefunden, als systematisch von Steigungsdreiecken ausgegangen wurde.

Hegel befand sich historisch auf einer Zwischenstufe. Zu seiner Zeit war das Konzept der Steigungsdreiecke noch nicht voll durchgesetzt, und erst recht waren die darauf aufbauenden Theorien noch unbekannt, einen Tangentialraum und ein Tangentialbündel (die Menge aller Tangentialräume) zu entwerfen. Aber dafür war es für ihn seinerzeit vielleicht leichter als heute zu erkennen, von welchen Ideen sich die Mathematiker leiten ließen, als sie eine Lösung suchten, die noch völlig unbekannt war. Diese leitenden Ideen zu erkennen, das war Hegels Ziel. Er wollte herausarbeiten, was bei den für den Differentialkalkül entwickelten mathematischen Verfahren neu ist im Vergleich zu den überlieferten Rechenverfahren des Addierens, Substrahierens, Multiplizierens und Dividierens. Seine Frage war, für das Neue die implizit bezogenen Qualitäten zu erkennen, die in den überlieferten traditionellen Rechenverfahren für endliche Größen noch fehlen oder nicht gebraucht werden, und die zugleich den Mathematikern verborgen blieben, da sie zu schnell mit den bloßen Ergebnissen zufrieden waren.

Im folgenden Zitat führt er den historischen Rückblick auf Barrow fort und bezieht sich weiter auf Subtangente und Ordinate. Diese Ausdrücke sind heute kaum mehr gebräuchlich, da die Mathematik seit dem 19. Jahrhundert möglichst vollständig auf geometrische Anschauung verzichtet und bestenfalls den Differenzenquotienten im Steigungsdreieck erwähnt. Mit Subtangente und Ordinate sind die Projektionen der Tangente auf die x- und y-Achse gemeint. Ihr Verhältnis ist das Grenzverhältnis, gegen das die Verhältnisse der Katheten in den Steigungsdreiecken konvergieren.



Figur 4: Subtangente und Ordinate

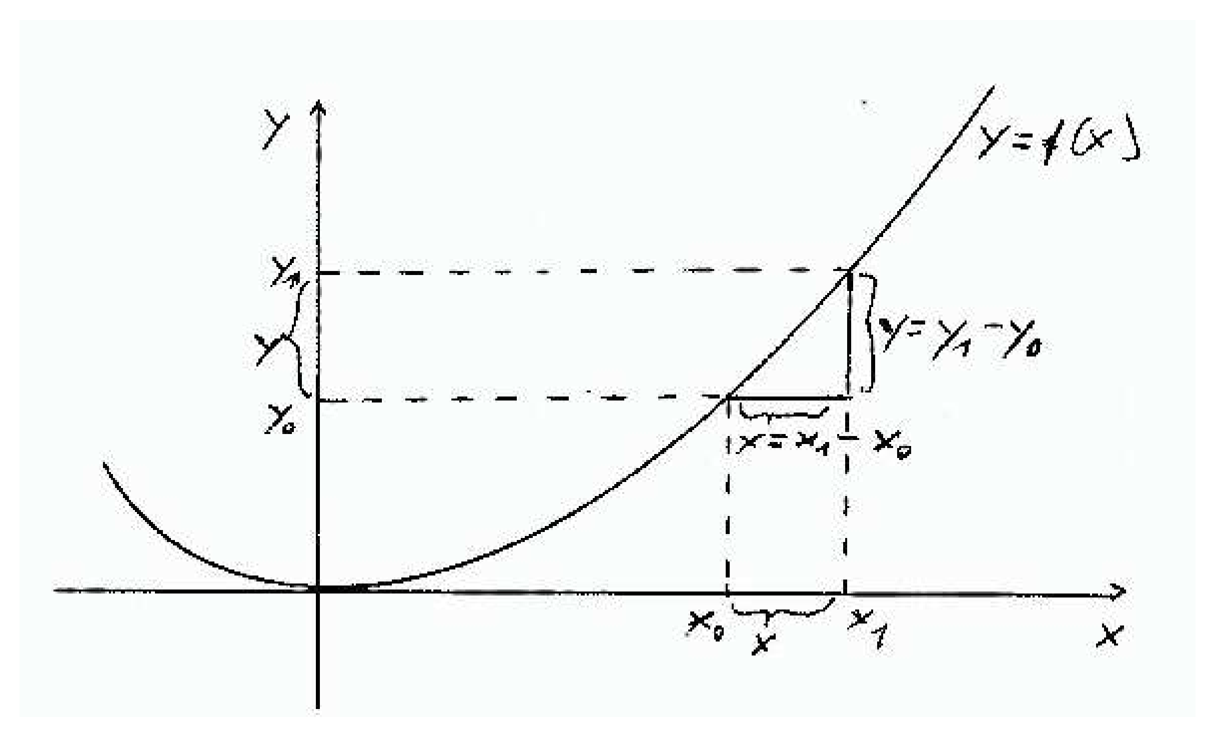
In dieser Figur ist die grün gezeichnete Tangente an der Stelle x_0 an die rot gezeichnete Kurve angelegt. Die Subtangente ist gelb gezeichnet, die Ordinate blau. Quelle

> »Das Verhältnis der Ordinate zur Subtangente ... hatten die Alten auf sinnreichem geometrischen Wege gefunden; was die neueren Erfinder entdeckt haben, ist das empirische Verfahren, die Gleichung der Kurve so zuzurichten, daß jenes erste Verhältnis geliefert wird, von dem *bereits bekannt war*, daß es einem Verhältnisse gleich ist, welches die Linie enthält, hier die Subtangente, um deren Bestimmung es zu tun ist. Teils ist nun jene Zurichtung der Gleichung methodisch gefaßt und gemacht worden – die Differentiation –, teils aber sind die imaginären Inkremente der Koordinaten und das imaginäre, hieraus und [aus] einem ebensolchen Inkremente der Tangente gebildete charakteristische Dreieck erfunden worden, damit die Proportionalität [339] des durch die Depotenzierung der Gleichung gefundenen Verhältnisses mit dem Verhältnisse der Ordinate und der Subtangente nicht als etwas empirisch nur aus der alten Bekanntschaft Aufgenommenes, sondern als ein Erwiesenes dargestellt werde. Die alte Bekanntschaft jedoch erweist sich überhaupt und am unverkennbarsten in der angeführten Form von Regeln als die einzige Veranlassung und respektive Berechtigung der *Annahme des charakteristischen Dreiecks* und *jener Proportionalität*« (HW 5.338f).

Hegel spricht an dieser Stelle zahlreiche Themen an, die Schritt um Schritt ausgeführt werden sollen, um im Ergebnis zu verstehen, warum er im Potenzverhältnis den Begriff sieht, aus dem der Differentialkalkül hergeleitet werden kann.

Übergang von der Funktionskurve zu ihrem Tangentialbündel

Die entscheidende Idee war die Einführung der Steigungsdreiecke. Einen ersten, noch unvollkommenen Ansatz hatte Barrow gefunden, der im Weiteren systematisch ausgebaut wurde.



Figur 5: Steigungsdreieck

Freihandzeichnung

Beim Steigungsdreieck wird ein Wert x_1 in der Nähe von x_0 betrachtet. Wird der Abstand von x_1 zu x_0 als x bezeichnet, d.h. $x_1 = x_0 + x$, dann kann für den Abstand von $f(x_1)$ zu $f(x_0)$ gesetzt werden $f(x_1) = f(x_0) + y$. Das Verhältnis beider Seiten im Steigungsdreieck beträgt also:

$$(1) \quad \frac{y}{x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x}$$

Mit dieser Gleichung war der allgemeine Ansatz gefunden, von dem aus algebraische Rechnungen begonnen werden konnten. In diesen Ansatz gehen keine Besonderheiten für bestimmte Funktionen f ein. Wenn eine Funktion f gegeben ist, kommt es darauf an, in dieser Gleichung auf der rechten Seite die Ausdrücke $f(x_0 + x)$ und $f(x_0)$ auszuschreiben und die Gleichung solange umzuformen, bis auf der linken Seite y / x stehen bleibt, während auf der rechten Seite weder x noch y im Nenner steht. Im einfachsten Beispiel wird die Funktion $f(x) = x^2$ betrachtet. In diesem Fall kann (1) in wenigen Schritten so umgeformt werden, dass auf der rechten Seite das Ergebnis steht (die Rechnung ist ausgeführt in Link):

$$(2) \quad \frac{y}{x} = x + 2 \cdot x_0; \text{ Ableitung der Funktion } f(x) = x^2 \text{ an der Stelle } x_0$$

Im Grenzübergang werden x = 0 und y = 0 gesetzt. Dadurch entfällt auf der rechten Seite x und mit $2 \cdot x_0$ ist die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 gefunden.

> Bei dieser Vorgehensweise drohen jedoch Missverständnisse, da x und y in mehrfacher Bedeutung gebraucht werden. Die Längen des Steigungsdreiecks müssen mit x und y bezeichnet werden, um das Verhältnis x / y zu erhalten. Zugleich sind aber mit x und y auch die x-Achse und y-Achse im Ganzen gemeint sowie die betrachtete Funktion, die y = f(x) geschrieben wird.

Wenn auf diese Weise bis auf die ursprünglich durchgeführten Rechnungen zurückgegangen wird, mit denen die Ableitungen ausgerechnet wurden, sieht jeder sofort, dass hier etwas nicht stimmen kann. Während auf der linken Seite im Grenzübergang ausgehend von x / y der "verbotene" Ausdruck 0 / 0 festgehalten wird, der die arithmetische Regel verletzt, dass durch 0 nicht geteilt werden kann, wird auf der rechten Seite x einfach weggelassen. Das Ergebnis sieht nach dem Grenzübergang so aus:

$$(3) \quad \frac{0}{0} = 2 \cdot x_0$$

Bei komplexeren Funktionen sind die Ausdrücke weitaus komplizierter, aber im Prinzip geschieht im Grenzübergang immer das gleiche: Auf der linken Seite wird 0 / 0 stehen gelassen, während auf der rechten Seite alles wegfällt, wo x im Zähler auftritt. Dieses unterschiedliche Operieren auf beiden Seiten führt zur D e p o t e n z i e r u n g : Wenn eine Funktion in der n-ten Potenz steht (in diesem Beispiel in der 2-ten Potenz), dann liefert die Ableitung einen Wert in der (n-1)-ten Potenz (in diesem Beispiel in der ersten Potenz). Dieses Vorgehen ist heute für niemanden mehr ein Skandalon, da die Ableitungsregeln als formaler Kalkül betrachtet werden, dessen Herkunft nicht mehr unterrichtet wird. Hegel hat es dagegen auf den Punkt gebracht:

> »Allein bei der Methode ihres Unendlichen findet sie den *Hauptwiderspruch* an der *eigentümlichen Methode* selbst, auf welcher sie überhaupt als Wissenschaft beruht. Denn die Rechnung des Unendlichen erlaubt und erfordert Verfahrungsweisen, welche die Mathematik bei Operationen mit endlichen Größen durchaus verwerfen muß, und zugleich behandelt sie ihre unendlichen Größen wie endliche Quanta und will auf jene dieselben Verfahrungsweisen anwenden, welche bei diesen gelten« (HW 5.281).

Dieser *Hauptwiderspruch* kann nur aufgelöst werden, wenn verstanden wird, wie hier in einer rein quantitativen Gleichung zwei unterschiedliche Qualitäten aufeinandertreffen. Diese Situation so genau und so überzeugend wie möglich in ihrer Unvermeidlichkeit zu schildern, ist für Hegel mindestens so wichtig, wie in der Mathematik den höheren Begriff der Unendlichkeit zu entdecken. Denn diese Situation zeigt, wie innerhalb der Mathematik und Naturwissenschaft ein Widerspruch entsteht, der weder auf unvollkommene Erkenntnis noch auf ein falsches Urteil oder einen misslungenen Schluss zurückgeht, sondern notwendig zur Sache gehört. Damit hat Hegel am Beispiel der neueren Mathematik nachweisen wollen, dass es »wahre Widersprüche« gibt, und die weiteren Bücher der Wissenschaft der Logik bekommen die Aufgabe, daraus sowohl die Konsequenzen für den Begriff des Widerspruchs zu ziehen als schließlich eine geeignete neue Logik zu entwickeln, in der Widersprüche dieser Art ihren Platz finden können.

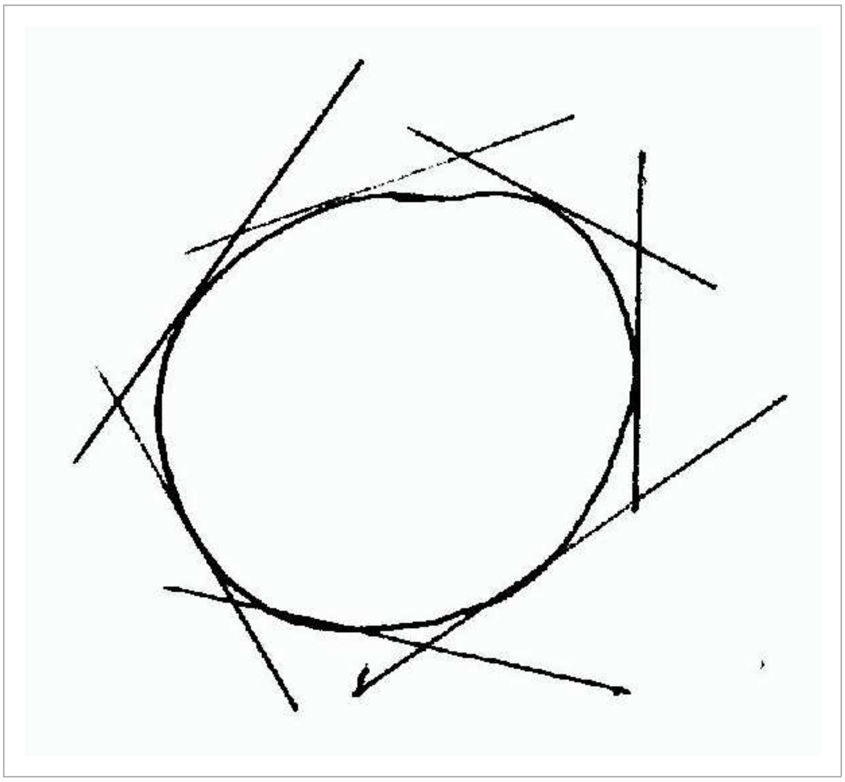
Der damalige Stand der Mathematik bot Hegel jedoch nur unzureichende Möglichkeiten, die höhere Qualität mathematisch zu beschreiben. Er sieht sie im Potenzverhältnis. Das kann mit den inzwischen entwickelten neuen Erkenntnissen treffender dargestellt werden, wobei ich hoffe zeigen zu können, was Hegel vermutlich mangels einer besseren Darstellungsmöglichkeit mit dem Potenzverhältnis gemeint hat.

Zunächst hat der hier dargestellte Weg der Ableitung einer Funktion f(x) zu einer neuen Funktion f '(x) geführt, die wiederum jedem x auf der x-Achse einen Funktionswert f '(x) auf der y-Achse zuordnet, der als die Steigung der Tangente an der entsprechenden Stelle verstanden wird. So führt in dem bereits genannten Beispiel die Funktion $f(x) = x^2$ zur abgeleiteten Funktion $f'(x) = 2 \cdot x$. Das ist jedoch nur ein Zwischenschritt und noch keineswegs das Ergebnis des Differenzierens, wie es heute fälschlich in der Schule und in zahlreichen Lehrbüchern dargestellt wird. Das Ziel besteht darin, eine Regel zu finden, die für eine gegebene Funktion f an jeder Stelle x_0 die Tangente liefert. Jede einzelne Tangente ist ihrerseits eine Funktion. Die Aufgabe der Zwischenlösung f '(x) besteht nur darin, an jeder Stelle x_0 die Steigung der Tangente zu finden.

Im Ganzen führt die Ableitung einer Funktionskurve f(x) nicht nur zur abgeleiteten Funktion f '(x), sondern zum Tangentialbündel, das ist die Gesamtheit aller Tangenten an einer Kurve. Während f(x) und f '(x) Abbildungen von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind ($\mathbb{R}$ ist das Symbol für die reellen Zahlen, die anschaulich der eindimensionalen Zahlengerade entsprechen), die jeder reellen Zahl x eine andere reelle Zahl f(x) zuordnen, handelt es sich bei der Regel, alle Tangenten der Funktion zu finden um eine Abbildung, die jeder reellen Zahl x eine Tangente an der Kurve von f zuordnet. Wenn diese Regel T_f genannt wird und das Tangentialbündel an der Kurve von f mit Tf, dann kann sie so aufgeschrieben werden:

$$(4) \quad T_f : \mathbb{R} \to Tf$$

Hier wird jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ die Tangente aus dem Tangentialbündel Tf zugeordnet, die an dieser Stelle die Funktion f berührt. Ein sehr einfaches Beispiel für ein Tangentialbündel sind alle Tangenten, die an einen Kreis angelegt werden können.



Figur 6 Kreis mit Tangenten

Freihandzeichnung

In diesem Beispiel wird eine Regel gesucht, die für jeden Punkt auf der Kreislinie die Tangente findet, die an dieser Stelle am Kreis angelegt ist. Anschaulich ist zu erkennen, dass alle Tangenten zusammen die vollständige zweidimensionale Ebene füllen mit Ausnahme des Inneren des Kreises. Anders gesagt: Jeder Punkt außerhalb des Kreises liegt auf mindestens einer Tangente, die an dem Kreis angelegt ist. Es lässt sich verallgemeinern: Während eine gekrümmte, differenzierbare Kurve eindimensional ist, ist ihr Tangentialbündel zweidimensional. im Weiteren soll dargelegt werden, wie dieser Übergang in die zweidimensionale Ebene Hegels Begriff des Potenzverhältnisses zugrundeliegt.

Allerdings wird in der Mathematik bis heute die Ableitung nicht in dieser Weise als eine Abbildung von den Urbildern einer Funktion auf ihr Tangentialbündel eingeführt, sondern nur als die abgeleitete Funktion $f'(x)$ verstanden. Dieses Verständnis steht quer zu dem völlig anderen Verständnis, das ich bei Hegel herauslese. Das erklärt, warum Hegels Deutung des Differentialkalküls bis heute alle Mathematiker ratlos läßt, da sie nicht sehen, wie sie ihrerseits das Grundanliegen des Differentialkalküls nicht festgehalten haben. (Das kann zu zahlreicher Verwirrung führen. Die Physiker denken dagegen wesentlich praktischer. Sie interessieren sich für Lösungen von Gradientenfeldern, wie es oben an dem medizinischen Beispiel dargestellt wurde. Jeder Gradient steht senkrecht auf der Tangente, die an einer Feldlinie angebracht wurde. Die Gesamtheit der Gradienten kann daher aus dem Tangentialbündel entlang der Feldlinien berechnet werden und wird als Cotangentialbündel bezeichnet. Wird gemessen und ausgewertet, wie dicht Feldlinien aneinander liegen und wie schnell daher der Übergang von einer Feldlinie zu einer benachbarten entlang des Gradienten erfolgt, ist nach heutigem Verständnis der Physik damit das Maß der E n e r g i e gefunden.)

Mathematisch ist jede einzelne Tangente eine eindimensionale Gerade, d.h. eine Abbildung vom Typ f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jede Abbildung f bildet Punkte $x \in \mathbb{R}$ auf andere Punkte $y \in \mathbb{R}$ ab. Wenn die Fläche $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die von der x-Achse und der y-Achse aufgespannt wird, als Menge von unendlich vielen Geraden verstanden wird, dann kann jede Tangente als ein Element aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dargestellt werden. Das Tangentialbündel aller Tangenten entlang einer Kurve für eine reell-wertige Funktion f ist daher eine Teilmenge aus dem Kreuzprodukt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Formel (4) kann entsprechend geschrieben werden:

$$(4a) \quad T_f : \mathbb{R} \longrightarrow T_f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist hier die Ebene gefunden, auf die Hegel Bezug nehmen wird.

Steigungsdreiecke verschwinden, ihr Verhältnis bleibt bestehen

Bisher wurde gezeigt, wie die Steigungsdreiecke der beste Ansatz sind, um geometrisch und algebraisch die Tangenten zu einer Funktionskurve zu finden. Doch was geschieht beim Übergang, wenn die Steigungsdreiecke sich der Tangente annähern?

Die Steigungsdreiecke "verschwinden" in dem Moment, wenn das "letzte" Steigungsdreieck identisch ist mit der gesuchten Tangente. Dann gibt es keine zwei Katheten mehr, deren Verhältnis gemessen und ausgerechnet werden kann. Aus dem Verhältnis der beiden Katheten im Steigungsdreieck wird das Verhältnis von Ordinate und Subtangente, siehe Figur 4. Die Situation ähnelt dem später von den Quantenmechanikern gerne zitierten Bild, dass das Lächeln der Katze bleibt, obwohl die Katze verschwindet. Das Verhältnis der Seiten der Steigungsdreiecke bleibt, obwohl das Steigungsdreieck verschwindet.

In diesem Sinne wählt Hegel eine schwierige Formulierung, die Wolff intensiv analysiert.

> »Die Gleichung *dy/dx* = *P* drückt gar nichts weiter aus, als daß *P* ein *Verhältnis* ist, und es ist dem *dy/dx* sonst kein reeller Sinn zuzuschreiben. Von diesem Verhältnis = P ist es aber ebenso noch unbekannt, welchem anderen Verhältnisse es gleich sei; solche Gleichung, die *Proportionalität*, gibt demselben erst einen Wert und Bedeutung« (HW 5.344, bei Wolff *Hegel und Cauchy* zitiert auf S. 225f).

Hier ist zweierlei zu beachten: (a) Der Grenzübergang der Steigungsdreiecke führt zum Verhältnis von Ordinate und Subtangente. Hegel behält – anders als die Mathematik heute – immer als das wesentliche Anliegen der Differentiation im Blick, an einer Stelle für eine Funktion eine Tangente zu finden. Das ist für ihn ihr "reeller Sinn". Dazu dienten die empirischen Messungen und die algebraischen Umformungen der Funktionskurve. Daher ist für ihn das Ergebnis der Differentiation ein Verhältnis (von Subtangente und Ordinate), das die Tangente beschreibt. (b) Die mit der Ableitung gefundene Funktion $f'(x)$ ist nur ein Hilfsmittel, um die Tangente zu bestimmen. Hegel lässt sich nicht davon irritieren, dass $f'(x)$ formal auch eine Funktion ist. (Das sichert, dass er nicht auf eine rein formale Position zurückfällt, aber es verhindert, dass er auch die zweite Ableitung $f''(x)$ betrachtet. Er nimmt $f'(x)$ nicht als vollwertige Funktion wahr, die ihrerseits abgeleitet werden kann.)

Damit zeigt sich der oben betrachtete Hauptwiderspruch im Grenzübergang von einer anderen Seite. Es muss etwas Übergreifendes geben, wodurch der Zusammenhang im Übergang vom Verhältnis der Katheten zur Steigung der Tangenten hergestellt und aufrecht erhalten wird. Während dort der Widerspruch nur konstatiert und nicht anders aufgelöst werden konnte als durch die bloße Setzung, dass beim Rechnen im Grenzübergang Regeln erlaubt sind, die sonst verboten sind, ist hier mithilfe der Darstellung der Steigungsdreiecke der gleiche Widerspruch in der Ebene dargestellt, in der die Steigungsdreiecke und Tangenten gezeichnet werden. Die Übertragung des gleichen Problems in einen anderen, erweiterten Kontext ermöglicht die Lösung. Sie liegt darin, hier die Gesamtheit aller Steigungsdreiecke zu betrachten und in deren Bewegung hin zur Tangente einen inneren Zusammenhang zu erkennen.

> Damit nimmt Hegel intuitive Anschauungen vorweg, die in der Mathematik erst wesentlich später ausgearbeitet wurden. Der kontinuierliche Übergang von Figuren in eine Grenzfigur, wie es hier im Übergang von den Sekanten der Steigungsdreiecke zur Tangente geschieht, wird in einem Faserbündel dargestellt, das mathematisch dem Tangentialbündel sehr ähnlich ist. Wenn dort der Übergang kontinuierlich möglich ist, liegt ein innerer Zusammenhang vor. Das ist einer der seltenen Fälle, bei denen die Mathematik für einen neuen Begriff exakt den treffenden Ausdruck gefunden hat (siehe im Detail Vorlesungen zur Eichfeldtheorie, z.B. Link). – Die Technik der Übertragung eines Problems von einem Gebiet in ein anderes, so wie es hier bei der Übertragung von der algebraischen Methode der Ableitung zur geometrischen Methode der Ableitung geschieht, wird systematisch untersucht von der Kategorientheorie. Die mathematische Kategorientheorie ist zu unterscheiden von der aristotelischen Kategorienlehre, aber es gibt starke innere Übereinstimmungen.

Veränderliche Größen im Potenzverhältnis

Hegel erkennt sehr genau, wie der Übergang von den Steigungsdreiecken zur Tangente ein Beispiel für veränderliche Größen ist. Deren Maß ist für ihn das Potenzverhältnis. Das soll an dieser Stelle abschließend vorgestellt werden.

Hegel unterscheidet direkte, umgekehrte und Potenzverhältnisse. Bei direkten und umgekehrten

Verhältnissen gibt es eine feste Konstante a, so dass für alle y gilt:

(5a) $x = a \cdot y$

(5b) $x = y / a$

> Das umgekehrte Verhältnis ergibt sich, wenn in (5a) zunächst der Faktor a auf die linke statt auf die rechte Seite geschrieben wird: $a \cdot x = y$ statt $x = a \cdot y$, und dann auf beiden Seiten durch a geteilt wird.

Hegel bezeichnet abweichend vom heutigen Sprachgebrauch in der Mathematik in (5a) den Faktor a als Exponenten. Beim direkten Verhältnis beträgt die Steigung immer a, verändert sich also nicht. Damit umschreibt Hegel die Aussage, dass in (5a) die zweite Ableitung, das ist physikalisch die Beschleunigung, 0 ist. Von (5a) und (5b) unterscheidet er qualitativ das Potenzverhältnis:

(5c) $x = y \cdot y$

In diesem Verhältnis ist gegenüber (5a) der feste Wert a durch eine veränderliche Größe y ersetzt, die gleichmäßig mit dem Wert y mitwächst, zu dem x in Verhältnis gesetzt wird.

Vor diesem Hintergrund wird verständlich, wenn Hegel schreibt:

> »Dadurch sind diese *Seiten* des Verhältnisses, *x* und *y*, *erstens* nicht nur keine bestimmten Quanta, sondern *zweitens* ihr *Verhältnis* ist nicht ein fixes Quantum (noch ist dabei ein solches wie bei *a* und *b gemeint*), nicht ein fester Quotient, sondern er ist *als Quantum* schlechthin *veränderlich*. Dies aber ist allein darin enthalten, daß *x* nicht zu *y* ein Verhältnis hat, sondern zum *Quadrate* von *y*. Das Verhältnis einer Größe zur *Potenz* ist nicht ein *Quantum*, sondern wesentlich *qualitatives* Verhältnis; das *Potenzenverhältnis* ist der *Umstand*, der als *Grundbestimmung* anzusehen ist« (HW 5.294).

Das Potenzverhältnis ist für Hegel das Maß veränderlicher Verhältnisse. Daher will er nachweisen, dass aus dem Begriff des Potenzverhältnisses der Differentialkalkül hergeleitet werden kann, der sich grundsätzlich auf veränderliche Größen bezieht, deren Bewegungskurve gekrümmt ist. Wenn sich etwas auf ähnliche Weise gleichmäßig verändert wie das Potenzverhältnis, dann hat es die Eigenschaft, abgeleitet werden zu können.

Herleitung aus der Qualität (Potenzverhältnis)

Hegel will die quantitativen Bestimmungen, die empirisch gemessen und mit den Regeln des Differentialkalküls algebraisch ausgerechnet werden, aus einer höheren Qualität herleiten. Wenn das gelingt, hat er das von Leibniz formulierte Programm umgesetzt und den von Kant eingeführten

Schematismus der Verstandesbegriffe wesentlich erweitert. In einer komplexen Formulierung fasst er alles zusammen, was bisher Schritt für Schritt nachvollzogen wurde:

- Während die Bewegungskurve reeller Funktionen für sich eindimensional ist, befinden sich die Steigungsdreiecke und Tangenten, die an sie angelegt werden, in der sie umgebenden Ebene. Die Betrachtung wechselt daher von einer eindimensionalen Kurve in die zweidimensionale Ebene.

- Das Potenzverhältnis $x = y \cdot y$ kann als Übergang in das Quadrat von y und damit in die Ebene interpretiert werden.

- Die Regeln des Differentialkalkül haben gezeigt, dass beim Ableiten von Polynomen eine Depotenzierung stattfindet: Wenn eine Funktion in der n-ten Potenz steht, dann steht ihre Ableitung in der (n-1)-ten Potenz. $f(x) = x^n$ ergibt abgeleitet $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

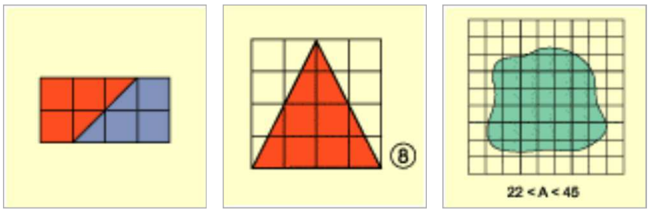
All dies packt Hegel in die folgende Formulierung:

> »Die gerade Linie hat ein empirisches Quantum, aber mit der Ebene tritt das Qualitative, die Potenzenbestimmung ein; nähere Modifikationen, z.B. daß dies gleich auch mit den ebenen Kurven geschieht, können wir, insofern es zunächst um den Unterschied bloß im allgemeinen zu tun ist, unerörtert lassen. Hiermit entsteht auch das *Bedürfnis, von einer höheren Potenzenbestimmung zu einer niedrigeren und umgekehrt überzugehen*, indem z.B. lineare Bestimmungen aus gegebenen Gleichungen der Fläche usf. oder umgekehrt abgeleitet werden sollen. – Die *Bewegung* ferner, als an der das Größenverhältnis des durchlaufenen Raumes und der dazugehörigen verflossenen Zeit zu betrachten ist, zeigt sich in den verschiedenen Bestimmungen einer schlecht-gleichförmigen, einer gleichförmig beschleunigten, einer abwechselnd gleichförmig beschleunigten und gleichförmig retardierten, in sich zurückkehrenden Bewegung; indem diese unterschiedenen Arten der Bewegung nach dem Größenverhältnisse ihrer Momente, des Raums und der Zeit, ausgedrückt werden, ergeben sich für sie Gleichungen aus unterschiedenen Potenzenbestimmungen, und insofern es Bedürfnis sein kann, eine Art der Bewegung oder auch der Raumgrößen, an welche eine Art gebunden ist, aus einer anderen Art derselben zu bestimmen, führt die Operation gleichfalls das Übergehen von einer Potenzenfunktion zu einer höheren oder niedrigeren herbei« (HW 5.334).

Äußere Multiplikation ("Multiplikation von Linien")

Während der Differentialkalkül immerhin in der Mathematik und erst recht der Philosophie der Mathematik intensiv diskutiert wird, – wenn auch Hegels Deutung weitgehend ignoriert bleibt –, hat das Potenzverhältnis eine zweite Seite, die die Mathematik zwar kennt, über deren tiefe Bedeutung sich die Mathematik und die Philosophie der Mathematik jedoch noch nicht einmal bewußt geworden sind. Wenn im Potenzverhältnis $x = y \cdot y$ gesetzt wird, entsteht ein neuer Ansatz für das Multiplizieren. Auch hier genügt es den Mathematikern, dessen formale Regeln aufzuschreiben und mit ihnen zu operieren, und ein Außenstehender wird wahrscheinlich gar nicht wissen, was hier geschieht. Wieder ist es erforderlich, auf die Ausgangsfrage zurückzugehen, die Hegel anders als alle anderen, die über die Mathematik nachgedacht haben, sehr genau trifft.

Seit Euklid und erst recht seit der Begründung der analytischen Geometrie durch Descartes erscheint es völlig selbstverständlich, zwei Längen miteinander zu multiplizieren, um daraus den Flächeninhalt zu berechnen, und dann in weiterer Verallgemeinerung aus dem Produkt von Breite, Höhe und Länge den Volumeninhalt. Wenn ein Rechteck die beiden Seitenlängen a und b hat, dann ergibt sich seine Fläche F als $F = a \cdot b$. Jeder kann sich das veranschaulichen, indem die Fläche zerlegt wird in ein Raster von Einheitsquadraten, die abgezählt werden können.



Figur 7a 7b 7c: Flächenberechnung durch Rasterung

»Zum Bestimmen des Flächeninhalts einer Figur kann diese mit Einheitsflächen, zum Beispiel mit Quadraten, ausgelegt werden. Die Maßzahl gibt dann die Anzahl der Einheitsquadrate an, die zum Auslegen der Figur benötigt werden« (Schülerlexikon).

Aus der Formel für die Berechnung der Fläche eines Rechtecks ergibt sich direkt die Formel für die Berechnung eines Dreiecks: $F = ½ \cdot a \cdot h$, wobei a die Länge der Grundseite und h die Höhe des Dreiecks ist. Da sich alle Figuren mit geradlinigen Außenkanten in Dreiecke zerlegen lassen, ist damit ein allgemeines Verfahren gefunden.

Bei diesen Multiplikationen ist jedoch genau genommen keine Fläche das Ergebnis, sondern die Größe der Fläche, das ist die Anzahl der Einheitsquadrate, die in die Fläche passen. Diese Zahl besagt, um das Wievielfache die Fläche F größer ist als eine Einheitsfläche, die basierend auf dem Pariser Urmeter in m^2 angegeben wird. Das bedeutet im einfachsten Fall des Rechtecks mit den Seitenlängen a und b:

(6) Die Größe der Seite a ergibt multipliziert mit der Göße der Seite b die Größe der Fläche F

Hier sind die Seitenlängen a und b reelle Zahlen jeweils mit der Dimensionsangabe m (für Meter), z.B. 4 m und 10 m, und F ist die Größe des Flächeninhalts in der Dimension m^2, in diesem Beispiel 40 m^2. Hegel unterscheidet die beiden Teiloperationen, aus denen sich das Multiplizieren der Seiten zusammensetzt: Zum einen werden reelle Zahlen multipliziert, zum anderen Dimensionen:

(6a) $a \cdot b = F$ (z.B. $4 \cdot 10 = 40$)

(6b) $m \otimes m = m^2$

Während in (6a) aus zwei reellen Zahlen eine neue reelle Zahl errechnet wird, wird in (6b) aus zwei Längen eine Fläche gebildet. Das kann in ähnlicher Weise wie für den Differentialkalkül geschrieben werden:

(7a) $\mathbb{R}, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $a,b,F \in \mathbb{R}$)

(7b) $\mathbb{R}, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (mit $cm \equiv \mathbb{R}$ und $cm^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

Jedem Mathematiker ist zwar klar, dass die von Graßmann eingeführte äußere Multiplikation (7b) anderen Regeln folgt als die "normale" Multiplikation (7a), aber ähnlich wie bei dem von Hegel festgestellten "Hauptwiderspruch" des Differentialkalküls wird auch hier von der Mathematik lediglich formal definiert, wie die Regeln der äußeren und normalen Multiplikation verknüpft werden. Niemand fragt, was es eigentlich bedeutet, Linien mit Linien zu multiplizieren. (Es wird sich zeigen, dass diese Frage tief mit Hegels Verständnis des Widerspruchs zu tun hat, wenn im Widerspruch senkrecht zu einer Linie eine andere Linie entsteht, entlang derer sich der Widerspruch auflöst.)

Hegels Text zu verstehen fällt daher aus dem Grund schwer, da mit Potenz in der Regel die normale Multiplikation gemeint ist, während hier aus dem Zusammenhang deutlich wird, dass Hegel die äußere Multiplikation meint. Das ist um so erstaunlicher, als die äußere Multiplikation in der Mathematik erst nach Hegel von Hermann Graßmann eingeführt worden ist, der Hegel gründlich studiert hat.

Dass sich die Mathematik hier am Rande des Paradoxes bewegt, wurde erst indirekt klar, als Cantor im Bereich der transfiniten Zahlen auf die verwandte Frage stieß, ob ein Produkt "unendlich mal unendlich" denkbar ist. Wenn das Symbol ∞ für "unendlich" steht, muss dann nicht Gleichung (8) gelten?

(8) $\infty \cdot \infty = \infty$

Denn wenn ∞ die größtmögliche Zahl ist, wie kann dann etwas entstehen, das noch größer ist? Damit werden aber die Rechenregeln des Multiplizierens verletzt. Cantor suchte nach einem Weg, im Bereich der transfiniten Zahlen auch mit ∞ formal ähnlich rechnen zu können wie mit endlichen Zahlen. Er erweiterte daher die Zahlklasse der natürlichen Zahlen um die transfiniten Zahlen und setzte, dass dort gelten soll:

(9) $\infty \cdot \infty = \infty^2$

Dieser Ausdruck ist rein formal aufgeschrieben, und es stellt sich die Frage, "wo" ∞^2 liegt. Wenn sich ∞^2 von ∞ unterscheiden soll, muss es einen eigenen Ort haben. Die Kontinuumhypothese besagt, dass die reellen Zahlen mächtig genug sind, um auch Zahlen wie ∞^2 aufnehmen zu können. Dann würde zwar (9) gelten, aber nicht von der Zahlengerade in die Ebene führen, sondern irgendwo "weit draußen" ist auch Platz für ∞^2. Neuere Untersuchungen deuten darauf hin, dass sich die Kontinuumhypothese nicht halten lässt und Zahlen wie ∞^2 in der Ebene liegen, d.h. in einer Zahlenmenge, die gleichmächtig wie $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist. Dann stellt sich die Frage, wie in (9) ein Sprung in die Ebene möglich ist, der eigentlich nur durch die äußere Multiplikation erreicht werden kann, d.h. durch eine Formulierung wie:

(10) $\infty \otimes \infty = \infty^2$

Diese Formel ist nur möglich, wenn Linien mit Linien multipliziert werden. Das heißt aber, dass ∞ anders als alle endlichen Zahlen kein Punkt ist, sondern "weit draußen" eine im Innern ununterscheidbare "verschmierte" Linie darstellt, die mit sich selbst multipliziert in die Ebene führt. Hier ist exakt die Verlegenheit getroffen, auf die die Mathematik und Physik immer stoßen, wenn sie Grenzübergänge betrachten.

∞ liegt offenbar auf der Grenze zwischen der normalen und der äußeren Multiplikation. An diese Grenze ist Hegel mit seinen Überlegungen zum Begriff des Unendlichen und der Herleitung des Differentialkalküls aus dem Potenzverhältnis gestoßen.

Nach meiner Überzeugung wird die Mathematik auf langen Umwegen zu dem Ergebnis kommen, das Hegel bereits vorweggenommen oder mindestens vorausgeahnt hat, als er in diesem Zusammenhang vom »Übergang in eine höhere Dimension« (HW 5.360 und ähnlich HW 5.371) sprach, der »*Multiplikation* von *Linien* mit *Linien*« (HW. 5. 361). Es kann bis heute nicht besser in Worte gefasst werden als es ihm in der weit ausholenden Anmerkung zur »Qualitativen Größenbestimmtheit« gelungen ist:

> »Die *Multiplikation* von *Linien* mit *Linien* bietet sich zunächst als etwas Widersinniges dar, insofern die Multiplikation überhaupt Zahlen betrifft, d. i. eine Veränderung von solchen ist, welche mit dem, in das sie übergehen, mit *dem Produkte ganz homogen* sind und nur die *Größe* verändern. Dagegen ist das, was Multiplizieren der Linie als solcher mit Linie hieße – es ist *ductus lineae in lineam* wie *plani in planum* genannt worden, es ist auch *ductus puncti in lineam* –, eine Veränderung nicht bloß der Größe, sondern ihrer als *qualitativer Bestimmung der Räumlichkeit*, als einer D i m e n s i o n ; das Übergehen der Linie in Fläche ist als *Außersichkommen* derselben zu fassen, wie das Außersichkommen des Punktes die Linie, der Fläche ein ganzer Raum ist« (HW 5.361).

Damit hat Hegel den entscheidenden Punkt getroffen. Das Potenzverhältnis eröffnet eine neue Dimension. Bei quantitativen Größen werden Zahlen miteinander multipliziert und führen zu einer neuen Zahl. Beim Potenzverhältnis werden Dimensionen miteinander multipliziert und führen in eine höhere Dimension. Im Differentialkalkül kommt beides zusammen.

Ich verstehe Hegel so, dass durch das Potenzverhältnis der Übergang in eine höhere Dimension gelingt und dadurch eine neue qualitative Größenbestimmtheit erreicht wird gegenüber der üblichen Multiplikation, bei der das Produkt zweier Zahlen wiederum eine Zahl ist (und keine höhere Dimension). Ist der Wechsel der Dimensionen verstanden, dann können daraus die Eigenschaften des Differentialkalkül mit seiner Depotenzierung hergeleitet werden. Dieser Schritt ist hier noch nicht gelungen, sondern es ist nur die Richtung angegeben, in der weiter geforscht werden muß.

Im Ergebnis wird die These vertreten, dass die mit dem Potenzverhältnis entstandene Ebene das Urbild des mehrdimensionalen Tangentialbündels ist. Wenn im Tangentialbündel beim Übergang von einer Tangente zur benachbarten Tangente Stetigkeit nachgewiesen werden kann, wird das mathematisch als die Eigenschaft des »Zusammenhangs« beschrieben. Dieser Zusammenhang ist nach meiner Hypothese die gesuchte höhere Qualität, aus der der Differentialkalkül hergeleitet werden kann. Physikalisch bedeutet das, dass die Kraft aus der Energie hergeleitet werden kann. Newton hat auch hier das Ergebnis bereits vorweggenommen, wie es ihm bei der Deutung des Differentialkalkül gelungen ist, und weswegen Hegel ihn als Beispiel für das höhere Beweisen in einer Wissenschaft der Maße nennt (HW 5.406).

Ausblick

Diese Unterscheidung von quantitativen und qualitativen Größenbestimmtheiten wird später entscheidend werden, um den Begriff der Größe zu klären. Es wird zu unterscheiden sein zwischen Größen innerhalb einer Dimension und Größen am Kreuzungspunkt verschiedener Dimensionen. Hegel hat das nicht weiter verfolgt. Peter Ruben kommt darauf an entscheidender Stelle zurück, wenn er in seiner Prädikationstheorie die Analyse von Sätzen bis zu dem Punkt verfolgt, wo sie sich in diesem Sinn als Größen verstehen lassen.

Die »*Multiplikation* von *Linien* mit *Linien*« führt direkt in einen Ausblick auf die geplanten weiteren Ausarbeitungen:

- Gegensätze führen zu einer Achse (HW 6.61f), auf der sie einander gegenüber stehen. In deren Mitte steht senkrecht zu ihr die Symmetrie-Achse. Das Entstehen der Symmetrie-Achse senkrecht auf der Symmetrie-Ebene ist eine Fortführung des Übergangs von der Linie in die Ebene.

- Der Mechanismus betrachtet, wie Mitteilungen durch einen Impuls weitergegeben werden. Hier kann sich – Hegel fortführend – der Gedanke eines inneren Impulsraums mit seinen endlich vielen Freiheitsgraden anschließen. Der Impulsraum ist ebenso an jedem Punkt "angeheftet", wie die Tangenten des Tangentialbündels an der Kurve.

- Die verborgene Kraft des Mediums erweist sich entsprechend der Allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein als dessen Krümmung. Einstein versteht die Krümmung als einen Tensor, der wie ein Gradient oder eine Tangente an jedem Punkt des Raums ergänzt ist.

- Die Prädikationstheorie von Ruben führt zur Proportionsgleichung: a:b und c:d sind proportional, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ gilt, d.h. wenn $a \cdot d$ und $c \cdot d$ die gleiche Fläche beschreiben. Das bedeutet aber, dass es ein Quadrat mit der Seitenlänge e gibt, $e \cdot e$, dem beide gleich sind.
- Die Urteilslehre führt nach Peter Ruben und Bruno Hartmann in einen mehrdimensionalen Raum, dessen Achsen das Einzelne, das Besondere und das Allgemeine sind. Sie vergleichen ihn mit anderen mehrdimensionalen Räumen in der Physik und der Ökonomie. In allen Fällen liegen äußere Multiplikationen von eindimensionalen Achsen zugrunde. Ich vermute, dass das etwas Richtiges trifft, aber anders ausgearbeitet werden muß. Das ist die Frage nach der Architektur von formalen Kalkülen.
- Die Differentiallogik soll nach dem Vorbild der Differentialgeometrie entworfen werden, die Grenzübergänge von Tangentialräumen betrachtet. Die Stetigkeit dieser Grenzübergänge ist meiner Meinung nach die höhere Qualität, aus der in Anlehnung an Hegel der Differentialkalkül hergeleitet werden kann, womit sich der Kreis wieder schließt.
- Hegel kommt in der Anmerkung 2 zur »Anwendung des Differentialkalkül« auf die physikalischen Gesetze von Schwerkraft und Trägheit zu sprechen. Siehe dazu Kraft der Trägheit.

Anhang 1: Vorläufer von Hegel (nach Wolff und Stekeler-Weithofer)

Hegel hat in zahlreichen, einander ähnlichen Formulierungen versucht, seine Herleitung des Differentialkalküls aus einer eigenen Qualität zu motivieren, aber sie bleiben ein wenig unbestimmt. Das dürfte auch mit den beschränkten mathematischen Mitteln zu tun haben, die zu seiner Zeit bekannt waren. Wolff und Stekeler-Weithofer suchen daher in der Philosophiegeschichte nach Vorläufern, an denen sich Hegel orientiert haben könnte, um seinen Ansatz in einen größeren Rahmen zu stellen und besser nachvollziehbar zu machen.

Ähnlichkeit

Wolff vermutet, dass Hegel mit seinem Begriff des Potenzverhältnis auf Leibniz' Begriff der Ähnlichkeit zurückgeht. Er stellt einige Zitate von Leibniz zusammen, die das belegen sollen.

> »Leibniz nennt '*ähnlich*' allgemein das, 'was dieselbe *Qualität* hat', während '*gleich*' ist, 'was dieselbe *Quantität* hat.' (Leibniz, Metaphysische Anfangsgründe der Mathematik, S. 55) ... 'Zur Erfassung der *Quantität* nämlich müssen die Gegenstände, die man vergleicht, unmittelbar nebeneinander gegeben

sein oder doch durch irgendeine Art der Vermittlung tatsächlich einander gegenübergestellt werden können.' (Leibniz, *Zur Analyse der Lage*, S. 72) 'Die *Qualität* aber ist diejenige Bestimmtheit der Dinge, die sich an ihnen erkennen läßt, wenn man sie einzeln und für sich genommen betrachtet, auch ohne daß sie also in unmittelbarem Beisammensein gegeben zu sein brauchen.' (Leibniz, Metaphysische Anfangsgründe der Mathematik, S. 55) 'Die Qualität [...] stellt dem Geiste etwas dar, was sich in einem Gegenstand, auch wenn man ihn allein betrachtet, für sich erkennen und weiterhin zum Vergleich zweier Gegenstände unter sich brauchen läßt, ohne daß es nötig ist, die Vergleichsobjekte unmittelbar oder mittelbar, durch Beziehung auf ein drittes Objekt als Maßstab, aneinander heranzubringen. (Leibniz, Zur Analyse der Lage, S. 72)« (zitiert bei Wolff *Hegel und Cauchy*, S. 247)

Das ist unmittelbar anschaulich klar. Auch die Beziehung zum Potenzverhältnis läßt sich einfach herstellen: Wenn in der Ebene Quadrate betrachtet werden, sind alle Quadrate einander völlig ähnlich unabhängig von ihrer jeweiligen absoluten Seitenlänge. Werden alle Quadrate der Größe nach geordnet, ergibt sich unmittelbar das Potenzverhältnis $x = y \cdot y$, wobei mit y die Seitenlänge der Quadrate gemeint ist. Es ist gut denkbar, dass Hegel auf diese Weise vom Begriff der Ähnlichkeit bei Leibniz auf seinen Begriff des Potenzverhältnisses gekommen ist, den er ebenfalls als die Qualität interpretiert, aus dem der Differentialkalkül hergeleitet werden kann.

Wolff belegt durch ein weiteres Zitat, wie Leibniz ausgehend von der Ähnlichkeit das »wahre Unendliche« bestimmt hat, das Hegels »wahrhaftem Unendlichen« sehr nahe kommt.

»Das 'wahre Unendliche' läßt sich durch beliebig fortgesetzte Zusammensetzung oder Teilung eines Quantums nicht erfassen, wohl aber dadurch, daß man die Qualität oder Ähnlichkeit der Teile eines Ganzen in Betracht zieht, deren quantitatives Verhältnis eine stetige Proportion ergibt« (Wolff *Hegel und Cauchy*, S. 249 mit Zitat aus Leibniz *Nouveaux Essays* II 17, § 3).

Mit der »stetigen Proportion« hat Leibniz bereits die Idee gehabt, die Hegel aufgenommen und erweitert hat. Das »wahrhafte Unendliche« ist nicht die Vorstellung des irgendwie gearteten "größten", "unfassbar großen" oder sonstwie umschriebenen Großen, sondern die Einsicht in eine Regel, von der verstanden wird, dass sie unendlich fortgeführt werden kann. Historisch geht das im Grunde auf den Unendlichkeitsbegriff bei Aristoteles zurück.

Dynamis

Es kann auch sein, dass Hegel beim Begriff Potenzverhältnis an das griechische *dynamis* dachte. Dazu Stekeler-Weithofer:

»Die Operation der Bestimmung der Flächengröße a^2 eines Quadrats durch geometrische, insofern qualitative, Verwandlung in ein flächengleiches Rechteck mit vorgegebener Seite e heißt bei den Griechen 'dynamis', 'Potenz'. Sie ist die Basis für die quantitative Inhaltsangabe $a \cdot b/2$ für des rechtwinkligen Dreiecks auf Grund der Länge a, b, und damit der gesamten Definition der Flächengröße überhaupt. Diese Multiplikation ist nicht nur für ganze oder rationale Zahlen arithmetisch definiert, sondern für alle elementargeometrisch konstruierbare ('euklidische') Längen. Durch die nur scheinbar triviale 'Identifikation' einer Einheitslänge e mit einer Einheitsfläche $e \cdot e$ hatte dann Descartes als erster Flächengrößen und damit zugleich auch Proportionen mit Längen identifiziert: Das war der zentrale Fortschritt gegenüber der antiken Mathematik. ... Die Operation des Quadrierens einer Längeneinheit ist somit in der Tat Basis der 'Arithmetisierung' bzw. 'Quantifizierung' der quantitativen Beziehungen von Größen (Längen, Flächen, Volumina) in einer geometrischen Form« (Stekeler-Weithofer, S. 17).

Anhang 2: Renate Wahsners Kritik an Hegels Lehre des Differentialkalküls

Renate Wahsner ist mit Michael Wolff einer Meinung, dass Hegel »von allen herkömmlichen und von allen bis heute üblichen Auffassungen« des Differentialkalküls abweicht (Wolff, Hegel und Cauchy, S. 252 Anm. 4, zitiert bei Wahsner, S. 290), doch hält sie Hegel diese Abweichung vor.

> »Sie weicht ab, weil sie nur einzelne Aspekte des Differentialkalküls erfaßt und die fehlenden durch eigene Gedanken ausfüllt, die aber die mathematische-physikalische Verwendung des Kalküls nicht ermöglichen würden. Wenn es so wäre, daß der Differentialkalkül Operationen gestattet, durch die man von einer Gleichung zu etwas gelangt, was keine Gleichung mehr ist, dann widerspräche dies in der Tat - wie Hegel kritisiert - allen mathematischen Grundsätzen« (Wahsner, S. 290).

Gegenüber Hegel hält sie daran fest, dass die Ableitung von einer Funktion f(x) zu einer neuen Funktion f '(x) führt, der abgeleiteten Funktion. Sie stellt fest, dass Hegel davon abweicht, wenn er als Ergebnis der Ableitung nicht eine Funktion, sondern eine Gesamtheit von Tangenten findet, das »'mysteriöse' p« (Wahsner, S. 290 mit Verweis auf HW 5.313-316).

Ohne es zu merken kommt sie jedoch im Weiteren inhaltlich auf den Ansatz von Hegel zurück und rechtfertigt ihn indirekt. Sie will erklären, warum es in der Bewegung nicht den Widerspruch gibt, dass etwas zugleich noch an einem Ort x und schon nicht mehr am Ort x ist. Sie bezieht sich auf Hegels Aussage, »daß die Bewegung der *daseiende* Widerspruch selbst ist« (HW 6.76), wobei Hegel wiederum ohne Aristoteles zu nennen auf die "alten Dialektiker" Bezug nimmt. Diesen Widerspruch will sie dadurch auflösen, dass die heutige Physik nicht nur den Ort, sondern auch die Geschwindigkeit *v* an diesem Ort betrachtet, und mit der Geschwindigkeit einen Bezug auf die Umgebung enthält. Was sie in physikalischer Anschauung als Geschwindigkeit *v* bezeichnet, sind genau die von Hegel gemeinten »mysteriösen« Verhältnisse *p*. Die Geschwindigkeiten liegen in dem Tangentialbündel, das Hegel durch die Ableitung erreicht.

> »Dieses Mißverständnis entsteht dadurch, daß man glaubt, die Physik gebe den Bewegungszustand eines Körpers zum Zeitpunkt t nur durch seine Ortskoordinate x an. Das trifft aber nicht zu, denn die Physik beschreibt den Bewegungszustand eines Körpers zum Zeitpunkt t durch die Angabe zweier Größen, der Ortskoordinate x und der Geschwindigkeit v. Die Formulierung '... ist und ist nicht ...' bezieht sich also auf zwei verschiedene Größen, wobei die Geschwindigkeit (zum Zeitpunkt t am Orte x) tatsächlich einen Bezug auf Orte ungleich x impliziert. (Dies drückt Newton mit den Worten aus: '... die *letzte* Geschwindigkeit, mit welcher ...'). Daß es hierbei nicht zu einem logischen Widerspruch kommt, liegt daran, daß es sich um zwei verschiedene, algebraisch voneinander unabhängige Größen handelt, die man ein und demselben Körper zu ein und demselben Zeitpunkt t zuordnen kann. Für die geradlinig gleichförmige Bewegung ist die Größe Geschwindigkeit bekanntlich dadurch definiert, daß man eine Ortsdifferenz zu einer Zeitdifferenz in Verhältnis setzt (x'-x)/(t'-t), sich also auf zwei verschiedene Orte bezieht«. Im Grenzübergang gehen »die Zeit t' gegen die Zeit t und somit auch die entsprechenden Orte x' und x gegeneinander« (Wahsner, S. 297).

Besser lässt es sich nicht sagen. Wahsner hat auf den Punkt gebracht, wie der »daseiende Widerspruch« aufgelöst werden kann, in dem sich nach Hegel die Bewegung befindet. Nach meiner Überzeugung ist es aber nur konsequent, diesen Ansatz weiter zurück zu verfolgen bis zur Begründung des Differentialkalküls, und von dort aus die Grundsatzfragen der heutigen Mathematik und Physik neu und anders zu entwickeln. – Es versteht sich, dass mit der Auflösbarkeit des »daseienden Widerspruchs« der Bewegung zugleich der von Hegel entwickelte Begriff des Widerspruchs neu zu hinterfragen ist und damit das Zentrum seiner Philosophie.

Literatur

Georg Wilhelm Friedrich Hegel: Werke in 20 Bänden. Auf der Grundlage der Werke von 1832-1845 neu ediert. Red. E. Moldenhauer und K. M. Michel. Frankfurt/M. 1969-1971 (zitiert als HW); Link

Gottfried Wilhelm Leibniz: Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie. Zusammengestellt von Ernst Cassirer. Hamburg 1996, 2 Bände

Pirmin Stekeler-Weithofer: Hegels Philosophie der Mathematik

Unterlage für eine Vorlesung 2011/2012, ursprünglich in: Ch. Demmerling und F. Kambartel (Hg.): Analytische Interpretationen zur Dialektik Hegels, Frankfurt am Main 1992, 139-197; Link

Renate Wahsner: »Der Gedanke kann nicht richtiger bestimmt werden, als Newton ihn gegeben hat.« Das mathematisch Unendliche und der Newtonsche Bewegungsbegriff im Lichte des begriffslogischen Zusammenhangs von Quantität und Qualität
in: Andreas Arndt, Christian Iber (Hg.): Hegels Seinslogik, Berlin 2000

Michael Wolff: Hegel und Cauchy
in: R.P. Horstmann & J.M. Petry (Hgg.) "Hegel und die Naturwissenschaften", Stuttgart 1986, S. 197 - 263

2012-2013

© tydecks.info 2013